「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

數論 – 素數與素因子分解

摘要

1. 介紹素數（任何大於 1 且只含有 1 和自身兩因子的整數）。
   兼談哥德巴赫（Goldbach）猜想等與素數相關的問題。
2. 認識半素數，即只含有兩個相同或不同素因子的整數。
3. 利用恆等式分解半素數。
4. 列寫素因子分解式 $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_n^{a_n}$ 的方法，及認識素因子分解式的唯一性。
5. 利用素因子分解式找出因子個數：
   因子個數 $r(N) = (a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\ldots(a_n+1)$
6. 利用素因子分解式找出因子總和及因子倒數總和：
   因子總和 $\sigma(N)$
   $$= (1+p_1+p_1^2+\ldots+p_1^{a_1})(1+p_2+p_2^2+\ldots+p_2^{a_2})\ldots(1+p_n+p_n^2+\ldots+p_n^{a_n})$$
   $$= \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1}\times\frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1}\times\frac{p_3^{a_3+1}-1}{p_3-1}\times\ldots\times\frac{p_n^{a_n+1}-1}{p_n-1}$$
   因子倒數總和
   $$= \sum\frac{1}{d} = \sum\frac{1}{a/d} = \frac{1}{a}\sum d = \frac{1}{a}\sigma(a)$$
7. 從 n 的素因子分解式中找尋 k 個連續正整數的和為 n 的
   設連續數列首項為 a，項數為 n，則有 $k(2a+k-1)=2n$。
   再從 n 的素因子分解式及 $k,(2a+k-1)$ 的奇偶性不同解出不同的組合。

拾例

1. 設 a,b,c 為三個素數。若 $a<b<c$ 及 $c=a^2+b^2$，求 a 的值。
(HKMO 2005/06 初賽團體)

答： 由於 a,b 必為一奇一偶，不然 c 為偶數。故 $a=2$。

2. 著名的哥德巴赫猜想指出，任何大於 7 的偶整數可以恰好寫成兩個不同的素數之和。用這種方法表示偶數 126，兩個素數之間最大的差是多少？
(AHSME 1973)

答： $126=3+123$，但 $123=3\times41$，不是素數。
$126=5+121$，但 $121=11\times11$，不是素數。
$126=7+119$，但 $119=7\times17$，不是素數。
$126=11+115$，但 $115=5\times23$，不是素數。
$126=13+113$，13 和 113 都是素數，故最大差為 $113-13=100$。

3. 若素數 $p, p+10, p+14$ 均為素數，求 p。(KMO 1981)

答： 顯然 $p+10\equiv p+1 \pmod 3$ 及 $p+14\equiv p+2 \pmod 3$，
所以 $p, p+10, p+14$ 其中一數為 3 的倍數，即 p 只可為 3。
當 $p=3$，另兩數分別為 13 和 17，亦為素數，合題意。
故得唯一解 $p=3$。

4. 求 $7^{99}+7^{100}+7^{101}$ 的最大素因子。(SAMO-S 2012)

答： 原式 $= 7^{99}(1+7+49) = 7^{99}\times57 = 3\times7^{99}\times19$。
故最大素因子為 19。

5. 有三個連續的兩位數，已知它們各個數位上六個數字的積為 750，求這三個數的平方和。

答： 由於 $750=2\times3\times5^3$，其素因子分解式中只出現了五個數字，
故那六個數字中必然有 1。
由此可知那三個整數為 51, 52 和 53。
所求的平方和 $= 51^2+52^2+53^2$
$= 2601+2704+2809$
$= 8114$。

6. 已知 999973 剛好有三個不同的素因子。求這些素因子之和。
(HKPSC 2004)

答： 999973 $= 100^3 - 3^3 = (100-3)(100^2 + 3\times 100 + 3^2)$

$= 97\times 10309 = 13^2 \times 61 \times 97$

故素因子之和為 $13+61+97 = 171$。

7. 在 4004 的因子中
(a) 共有多少個數？
(b) 共有多少個為偶數？

答： (a) $4004 = 2^2 \times 7 \times 11 \times 13$，故因子個數為 $(2+1)(1+1)^3 = 24$。

(b) 解法一：

所求因子的素因子分解式中

2 的指數必為 1 或 2，其餘素數的指數可取 0 或 1。

故個數為 $2^4 = 16$。

解法二：

即求 $\frac{4004}{2} = 2002 = 2\times 7\times 11\times 13$ 的因子個數，

即為 $(1+1)^4 = 16$。

8. 若 x 有 14 個因子，且 x 為 14 的倍數，求 x 的最小可能值。

答： 因為 $14 = 2\times 7$，故 x 至少含有兩個素因子。

即 x 不可能為 a^{13} 的型式，故 x 只可以為 bc^6 的型式。

顯然 $7\times 2^6 < 2\times 7^6$，故 x 的最小可能值為 $7\times 2^6 = 448$。

全部數論問題就在於以何種方法把自然數分解爲素因子。

法國數學家、律師

費馬 (Pierre de Fermat 1601-1665)

9. (a) 求 4500 的所有正因子總和。
(b) 求 4500 的所有正因子的倒數的總和。
(c) 求 4500 中所有奇因子的總和。
(d) 求 4500 中所有偶因子的總和。

答： (a) $4500 = 2^2 \times 3^2 \times 5^3$，

故其因子總和 $= (1+2+4)(1+3+9)(1+5+25+125)$

$= 7\times13\times156 = 14196$。

(b) 因子倒數總和 $= \dfrac{14196}{4500} = \dfrac{1183}{375}$。

(c) 奇因子即形如 3^x5^y（其中 x, y 為非負整數）的因子。

故奇因子總和 $= (1+3+9)(1+5+25+125)$

$= 13\times156 = 2028$。

(d) 偶因子即形如 $2^a3^x5^y$（其中 x, y 為非負整數 及 $a \geq 1$）的因子。

故偶因子總和 $= (2+4)(1+3+9)(1+5+25+125)$

$= 6\times13\times156 = 12168$。

10. 設 k 為大於 1 的整數。若 k 個連續正整數之和是 234，求 k 最大可能的值及最小可能值。

答： 設所求數列的首項為 a，項數為 k，

則
$$a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+k-1) = 234$$
$$\frac{k(2a+k-1)}{2} = 234$$
$$k(2a+k-1) = 468$$
$$k(2a+k-1) = 2^2\times3^2\times13$$

由於 k 和 $2a+k-1$ 的奇偶性不同 且 $2a+k-1>k$。

先取 k 的最小值，

得 $\begin{cases} k=3 \\ 2a+k-1=156 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k=3 \\ a=77 \end{cases}$。

故和式為 77 + 78 + 79 = 234，

即 k 的最小可能值為 3。

再取 k 的最大值，

得 $\begin{cases} k=13 \\ 2a+k-1=36 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k=13 \\ a=12 \end{cases}$。

故和式為 $12+13+14+\ldots+24 = 234$，

即 k 的最小可能值為 13。

淺問

1. 下列各數只有兩相異素因子，因式分解下列各數，且求素因子之和：
(a) 7999　(b) 9991　(c) 216343

2. 求下列各數的因子個數：
(a) 28　(b) 64　(c) 72　(d) 666　(e) 1000

3. 求含有下列數目的不同因子的整數的最小值：
(a) 8　(b) 9　(c) 10　(d) 11　(e) 12

4. 已知 P 是一個含有 12 個因子（包括 P 本身）的整數，且 49 是 P 的其中一個因子，求 P 的最小值。

5. 一個正整數 N 正好有 144 個正整數因子，並且它的正整數因子中有 10 個連續正整數，求 N 的最小值。

6. 若 R 個連續正整數之和是 1000（其中 R > 1），求 R 的最小值。
(HKMO 2003/04 初賽團體)

7. 設 n 為大於 1 的整數。若 n 較它的任何一個素因子的 1200 倍為大，求 n 的最小可能值。（HKPSC 2010）

8. 求下列各數的因子總和及因子倒數總和：
(a) 28　(b) 64　(c) 72　(d) 666　(e) 1000

9. 若三個素數的乘積為它們的和的 7 倍，求此三個素數的平方和。

10. 一個大於 1 的自然數，如果它恰好等於其不同真因子（除去其本身的所有因子）的乘積，那麼稱這數為「好的」。求前十個「好的」自然數之和。

11. 若素數 p 可使 $p+1$ 只含有素因子 2 或 3，則我們稱此素數為「第一類素數」。求最小的十個「第一類素數」之和。

12. 當 491 除以一兩位數，餘數是 59 ，求該兩位數。
(HKMO 2007/08 決賽團體)

13. 若 p,q 為素數，且 $5p+3q=91$，求 p 。（培正 2004 中三）

詳答

1. (a) 7999 = 20^3-1^3 = $(20-1)(20^2+20\times1+1^2)$
   = 19×421
   素因子之和 = 19 + 421 = 440

   (b) 9991 = 100^2-3^2 = $(100-3)(100+3)$
   = 97×103
   素因子之和 = 97 + 103 = 200

   (c) 216343 = 60^3+7^3 = $(60+7)(60^2-7\times60+7^2)$
   = 67×3229
   素因子之和 = 67 + 3229 = 3296

2. (a) 28= $2^2\times7$， 因子個數= $(2+1)(1+1)$ = 6。
   (b) 64= 2^6， 因子個數= 6+1 = 7。
   (c) 72= $2^3\times3^2$， 因子個數= (3+1)(2+1) = 12。
   (d) 666= $2\times3^2\times37$， 因子個數= (1+1)(2+1)(1+1) = 12。
   (e) 1000= $2^3\times5^3$， 因子個數= (3+1)(3+1) = 16。

3. (a) 8 = $2\times4=2\times2\times2$，
   故該數可分解為 3 個不同的素因子且各指數為 1，
   即取值為 $2\times3\times5=30$。
   但由於 $5>2^2$，故以兩個素因子的分解法可得更小的值，
   即最小值為 $2^3\times3=24$。

   (b) 9 = 3×3
   故該數可分解為 2 個不同的素因子且各指數為 2，
   即最小值為 $2^2\times3^2=36$。

   (c) 10 = 2×5，
   故該數可分解為 2 個不同的素因子且素因子的指數分別為 1 和 4，
   即最小值為 $2^4\times3=48$。

   (d) 11 為素數，即該數只有一個素因子且指數為 10，
   即最小值為 $2^{10}=1024$。

   (e) 12 = $2\times2\times3$，
   故該數可分解為 3 個不同的素因子且其中兩個素因子的指數為 1，
   另一個為 2，即最小值取 $2^2\times3\times5=60$。

4. 12 = $1\times12=2\times6=3\times4=2\times2\times3$，
而 P 可取模式為 a^{11} 或 bc^5 或 d^2e^3 或 fgh^2，
其中 a, b, c, d, e, f, g, h 均為素數。
而 49 = 7^2，故 P 的素因子中必含 7 且指數必不少於 2。
所以 P 的最小值可取 7^{11}、2×7^5、$2^2\times7^3$、$2^3\times7^2$、$2\times3\times7^2$，
當中最小的為 $2\times3\times7^2=294$。

5. 由於 N 取最小值，故該 10 個連續的正整數因子為 1 至 10，即 N 的最小值可被 7、8、9、10 整除，故 N 的最小值可整除 $2^3\times3^2\times5\times7$。
另一方面 144 = $2^4\times3^2$，但 N 必含有最小 4 個不同的素因子，可用的展開式僅為 144 = $6\times4\times3\times2=8\times3\times3\times2=8\times4\times3\times3=9\times4\times2\times2$
= $12\times3\times2\times2=4\times3\times3\times2\times2=6\times3\times2\times2\times2$。
開由於取 5 個不同素因子，可使 N 的數值更小，
故取 $2^3\times3^2\times5^2\times7\times11$ 或 $2^5\times3^2\times5\times7\times11$，
由於 $5>2^2$，故以後者較小，
即取最小值為 $2^5\times3^2\times5\times7\times11=110880$。

6. 設所求數列的首項為 a，項數為 k，
則
$$a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+k-1) = 1000$$
$$\frac{k(2a+k-1)}{2} = 1000$$
$$k(2a+k-1) = 2000$$
$$k(2a+k-1) = 2^4\times5^3$$
由於 k 和 $2a+k-1$ 的奇偶性不同，
但由於 $2a+k-1>k$，所以取 k 的最小值，
得 $\begin{cases} k=5 \\ 2a+k-1=400 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k=5 \\ a=198 \end{cases}$。
故和式為 198 + 199 + 200 + 201 + 202 = 1000，
即 k 的最小可能值為 5。

7. 設 n 只有素因子 2，即 $n\geq2400$。而 n 最小也是 $2^{12}=4096$。
設 n 只有素因子 2 和 3，即 $n\geq3600$。而 n 最小也是 $2^4\times3^5=3888$。
若 n 含有素因子 5，即 $n\geq6000$。
故 n 的最小值為 3888。

8. (a) $28 = 2^2 \times 7$，

因子總和 $= (1+2+4)(1+7) = 56$

因子倒數總和 $= \dfrac{1}{28} \times 56 = 2$

（註： 28 的因子總和剛巧為 28 的兩倍，這類數我們稱為完全數，如 6、496 等。）

(b) $64 = 2^6$，

因子總和 $= 1+2+4+8+16+32+64 = 127$

因子倒數總和 $= \dfrac{1}{64} \times 127 = \dfrac{127}{64}$

(c) $72 = 2^3 \times 3^2$，

因子總和 $= (1+2+4+8)(1+3+9) = 195$

因子倒數總和 $= \dfrac{1}{72} \times 195 = \dfrac{65}{24}$

(d) $666 = 2 \times 3^2 \times 37$，

因子總和 $= (1+2)(1+3+9)(1+37) = 1482$

因子倒數總和 $= \dfrac{1}{666} \times 1482 = \dfrac{247}{111}$

(e) $1000 = 2^3 \times 5^3$，

因子總和 $= (1+2+4+8)(1+5+25+125) = 2340$

因子倒數總和 $= \dfrac{1}{1000} \times 2340 = \dfrac{117}{50}$

9. 設三個素數為 a, b, c，

則 $7(a+b+c) = abc$

即三個素數當中有一個為 7，不失一般性，設 $a = 7$ 及 $b \geq c$。

則
$$\begin{aligned} 7+b+c &= bc \\ bc-b-c &= 7 \\ bc-b-c+1 &= 8 \\ (b-1)(c-1) &= 8 \end{aligned}$$

由於 b, c 均為素數，即 $\begin{cases} b-1=4 \\ c-1=2 \end{cases}$，故該三素數為 3, 5, 7。

三素數的平方和 $= 3^2 + 5^2 + 7^2 = 83$。

10. 由此 $n=a\times b$，其中 a,b 為不相等的素數，其真因子只有 $1,a,b$，
乘積為 $1\times a\times b=ab=n$；
或 $n=c^3$ 其中 c 為素數，其真因子有 $1,c,c^2$，
乘積為 $1\times c\times c^2=c^3=n$；
即前十個「好的」自然數為 6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27, 33。
總和 = $6+8+10+14+15+21+22+26+27+33$ = 182。

11. 2 是「第一類素數」，因 $2+1=3$；
3 是「第一類素數」，因 $3+1=2^2$；
5 是「第一類素數」，因 $5+1=2\times 3$；
7 是「第一類素數」，因 $7+1=2^3$；
11 是「第一類素數」，因 $11+1=2^2\times 3$；
17 是「第一類素數」，因 $17+1=2\times 3^2$；
23 是「第一類素數」，因 $23+1=2^3\times 3$；
31 是「第一類素數」，因 $31+1=2^5$；
47 是「第一類素數」，因 $47+1=2^3\times 3$；
53 是「第一類素數」，因 $53+1=2\times 3^3$；
所以所求的和為 $2+3+5+7+11+17+23+31+47+53=$ 199。

12. 即該兩位數為 $491-59=432$ 的因子。
432 的因子有： 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 108, 144, 216, 432。
當中大於 59 且為兩位數的僅有 72，故該兩位數為 72。

13. 由於奇偶性不同，故 p,q 不可同為奇素數。
設 $p=2$，得 $3q=81$，即 $q=27$ 不是素數。
設 $q=2$，得 $5p=85$，即 $p=17$。故得解 $p=17$。