「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

數論 － 最大公因子與最小公倍數

摘要

若 $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_n^{a_n}$, $M = p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3} \dots p_n^{b_n}$

1. 利用素因子分解式、短除法或輾轉相除法找尋最大公因子：

   $(N, M) = p_1^{c_1} p_2^{c_2} p_3^{c_3} \dots p_n^{c_n}$

   其中 $c_i = \min(a_i, b_i)$ ，$i = 1,2,3,\dots,n$

2. 利用素因子分解式、短除法找尋最小公倍數：

   $[N, M] = p_1^{d_1} p_2^{d_2} p_3^{d_3} \dots p_n^{d_n}$

   其中 $d_i = \max(a_i, b_i)$ ，$i = 1,2,3,\dots,n$

3. 運用兩數之積等於其最大公因子和最小公倍數之乘積：

   $NM = [N, M](N, M)$

4. 互素的定義及歐拉（Euler）函數：

   (a)　a, b 為互素即 $(a, b) = 1$

   (b)　歐拉函數 $\phi(N)$

   即小於 N 但與 N 互素的自然數的數目。

   $\phi(N) = N(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})(1 - \frac{1}{p_3})\dots(1 - \frac{1}{p_n})$

   $\phi(ab) = \phi(a) \times \phi(b)$ ，當（a, b） = 1。

   (c)　若 p, q 為相異素數：

   (i)　$\phi(p) = p - 1$

   (ii)　$\phi(pq) = (p - 1)(q - 1)$

   (d)　小於 N 但與 N 互素的自然數的總和

   S　=　$\frac{1}{2} N \times \phi(N)$

5. 整值多項式的公因子

   對於任何 k 次整值多項式，若 x 取 $k+1$ 個連續整數，對應多項式的值均可被 m 整除，則對任整數此多項式的值均可被 m 整除。

拾例

1. 若 $[40,b]=280$ 及 $(40,b)=10$，求 b 的值。（HKMO 2004/05 決賽個人）

答： $[40,b]\times(40,b)=40b$，即 $2800=40b$， $b=70$。

2. 求 2007 和 7002 的最大公因數和最小公倍數。

答： $(2007,7002) = (2007,981) = (45,981) = (45,36) = (9,36) = 9$

故最大公因子為 9。

最小公倍數 $= \dfrac{2007\times7002}{9} =$ 1561446。

3. 數 1059, 1417, 2312 每個數除以 d ，若餘數都是 r，其中 d 是大於 1 的整數。求 $d-r$ 的值。（AHSME 1976）

答： $1417-1059=358$，$2312-1417=895$。

d = （895, 358） = （179, 358） = 179。

由於 179 為素數，故 $d=179$，

另 $1059=5\times179+164$，$r=164$。

即 $d-r=179-164=15$。

4. 兩個正整數 A,B 滿足 $A>B$、 $A+B=2000$ 及 $(A,B)=200$，求 $A-B$ 的最小可能值。

答： 設 $A=200a, B=200b$， $(a,b)=1$。

$200a+200b = 2000$

$a+b = 10$

因為 $(a,b)=1$，故得解 $a=9,b=1$ 或 $a=7,b=3$。

故 $A-B$ 的最小可能值為 $200(7-3) = 800$。

5. 自然數 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{49}$ 的和為 999，令 d 為 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{49}$ 的最大公因子，d 的最大值是多少？ （KMO 1979）

答： 由於 $d=(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{49})$，

則 $d\,|\,(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{49})=999$，即 $d\,|\,999=3^3\times37$。

另一方面，因 $d\,|\,a_k$，其中 $k=1,2,3,\ldots,49$

所以 $a_k\ge d$，即 $999=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{49}\ge 49d$

所以 $d\le\dfrac{999}{49}<21$，取最大值 $d=9$。

6. 有多少個 k 值使 4^4 和 k 的最小公倍數為 6^8？

答： $6^8 = (2\times3)^8 = 2^8\times3^8$；

$4^4 = (2^2)^4 = 2^8$；

所以 k $= 2^a\times3^8$，其中 $a = 0,1,2,\ldots,8$，

故合共有 9 個 k。

7. 若 1 至 2013 內與 2013 互素的整數有 N 個，而這 N 個與 2013 互素的整數的總和為 S。求 $N+S$ 的值。

答： 由於 $2013 = 3\times11\times61$，

故 N $= 2013\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{11})\times(1-\frac{1}{61})$

$= 2013\times\frac{2}{3}\times\frac{10}{11}\times\frac{60}{61} = 1200$。

而 S $= \frac{1}{2}\times2013\times1200 = 1207800$。

所以 $N+S = 1200+1207800 = 1209000$。

8. 對於任何正整數 n，定義 $\varphi(n)$ 為不大於 n 且與 n 互素的整數個數。若 $\varphi(n) = 20$，求 n 的所有可能值總和。

答： 因為 $20+1 = 21$ 不為素數。

因為 $20 = 4\times5$，且 5 為素數，故 $n = 25,50$。

因為 $20 = 2\times10$，且 3,11 為素數，故 $n = 33,66$。

因為 $20 = 1\times2\times10$，且 2,11 為素數，故 $n = 2^2\times11 = 44$。

總結 $n = 25,33,44,50,66$。

故總和= $25+33+44+50+66 = 218$。

9. 試求能整除所有 $f(n) = n^3+5n$（其中 n 為任意正整數）的一切整數中最大的一個。

答： 由於 $f(n)$ 為一三次多項式，

而 $f(1) = 6$、$f(2) = 18$、$f(3) = 42$ 及 $f(4) = 84$，

此四數的最大公因子為 6，故答案為 6。

10. 分數 $\frac{n-9}{7n+4}$ 非零可約，求正整數 n 的最小值。

答： $(n-9,7n+4) = 7(n-9)-(7n+4) = -67$，

所以 $n-9$ 為 67 的最小非 1 因子，即 $n-9 = 67$，$n = 76$。

（註： 當 $n = 76$ 時，$\frac{n-9}{7n+4} = \frac{67}{536} = \frac{1}{8}$。）

淺問

1. 求下列各數的最大公因子：

   (a) 123, 456, 789　　(b) 987, 654, 321

2. 求下列各數的最大公因子與最小公倍數：

   (a) 5432, 9876　　(b) 2442, 17171

   (c) 12345, 67890　　(d) 24680, 97531

3. 若 $a>b>0$，給定 (a, b) 及 [a, b]，求正整數 a,b 之和的最小值：

   (a) $(a,b)=10,[a,b]=30$　　(b) $(a,b)=12,[a,b]=72$

4. 若 R 是 1234、2345、9314 被 D 除後的餘數，這裡 D 是大於 1 的整數。求 D + R 的值。

5. 已知整數 n 除 81849、106392 及 124374 得出的餘數相等，求 n 的最大值。(HKMO 1999/2000 決賽團體)

6. 求最小正整數 n，使 n+256 為 625 的倍數，且 n + 625 為 256 的倍數。

7. 求以下列各數為分母的既約真分數個數：

   (a) 100　　(b) 120　　(c) 256

8. 求所有小於 1000 且與 1000 互素的自然數總和。

9. 對任何正整數 n，定義 $\varphi(n)$ 為不大於 n 且與 n 互素的整數個數，求下列情況 n 的所有可能值：

   (a) $\varphi(n)=10$　　(b) $\varphi(n)=12$　　(c) $\varphi(n)=14$

10. 若下列分數均為非零可約，求正整數 a 的最小值：

    (a) $\dfrac{a-10}{3a+55}$　　(b) $\dfrac{2a+17}{5a+2}$　　(c) $\dfrac{a+1}{10-3a}$

11. 若 n 是正整數，且 n^6+206 可被 n^2+2 整除，求 n 所有可能值之和。(HKPSC 2008)

12. 設 a,b,c 為正整數，其中 $ab+bc-ca=0$ 而 $a-c=101$。求 b。(HKPSC 2007)

詳答

1.	(a)	(123, 456, 789)	=	(123, 87, 51)	=	(21，36，51)
			=	(21，15，9)	=	(3，6，9)
			=	3		
	(b)	(987，654，321)	=	(24，12，321)	=	(12，9)
			=	3		
2.	(a)	(5432，9876)	=	(5432，4444)	=	(988，4444)
			=	(492，988)	=	(492，4)
			=	4		
		[5432，9876]	=	$\frac{5432\times 9876}{4}$	=	13411608
	(b)	(2442，17171)	=	(2442，77)	=	(55，77)
			=	(55，22)	=	(11，22)
			=	11		
		[2442，17171]	=	$\frac{2442\times 17171}{11}$	=	3811962
	(c)	(12345，67890)	=	(12345，6165)	=	(15，6165)
			=	15		
		[12345，67890]	=	$\frac{12345\times 67890}{15}$	=	55873470
	(d)	(24680，97531)	=	(24680，23491)	=	(1189，23481)
			=	(1189，890)	=	(299，890)
			=	(299，292)	=	(7，292)
			=	(7，5)	=	(2，5)
			=	(2，1)	=	1
		[24680，97531]	=	24680×97531	=	2407065080

3. (a) 由於 $\frac{30}{10}=3$，故得 $a=30, b=10$，$a+b=30+10=40$。

(b) 由於 $\frac{72}{12}=6=2\times 3$，故得 $(a,b)=(72,12),(36,24)$，

當中以 $a+b=36+24=60$ 最小。

4. 由於 $1234 \equiv 2345 \equiv 9314 \pmod{D}$，
所以 D 整除 2345 - 1234 = 1111 及 9314 - 2345 = 6969。
即 D 整除 (6969, 1111) = (303, 1111) = (303, 202)
= (101, 202) = 101
又因 101 是素數 且 D>1，故 D = 101。
而 $1234 = 101 \times 12 + 22$，得 R = 22，所以 D + R = 101 + 22 = 123。

5. n 除 81849、106392 及 124374 的餘數相同，
即 n 整除 106392 - 81849 = 24543 及 124374 - 106392 = 17982。
即 n 整除 (24543, 17982) = (6561, 17982) = (6561, 4860)
= (1701, 4860) = (1701, 1458)
= (243, 1458) = 243
故 n 的最大值為 243。

6. n + 625 + 256 為 625 和 256 的最小公倍，
但 (625, 256) = 1，即
$n + 625 + 256 = 625 \times 256 = 160000$
n = 159119

7. (a) 100 = $2^2 \times 5^2$，
故既約真分數個數為 = $100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})$
= $100 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ = 40。
(b) 120 = $2^3 \times 3 \times 5$，
故既約真分數個數為 = $120(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})$
= $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ = 32。
(c) 256 = 2^8，
故既約真分數個數為 = $256(1-\frac{1}{2})$
= $256 \times \frac{1}{2}$ = 128。

8. 由於 1000 = $2^3 \times 5^3$，
所以 $\phi(1000) = 1000(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5}) = 1000 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5}$ = 400。
故總和為 $\frac{1}{2} \times 1000 \times 400$ = 200000。

9. (a) 因為 $10+1=11$ 為素數，故有解 $n=11,22$。
另 $10=2\times5$，但 $5+1$ 不是素數，故無別解。
總結 $n=11,22$。
(b) 因為 $12+1=13$ 為素數，故 $n=13,26$。
因為 $12=2\times6$，得 $n=3\times7=21$，故有解 $n=21,42$。
因為 $12=1\times2\times6$，得 $n=2^2\times7=28$
因為 $12=(1\times2)\times(2\times3)$，得 $n=2^2\times3^2=36$。
總結 $n=13,21,26,28,36,42$。
(c) 因為 $14+1=15$ 不是素數，
因為 $14=2\times7$，但 $7+1$ 不是素數，故無解。

10. (a) $(a-10,3a+55) = 3(a-10)-(3a+55) =$ -85
所以 $a-10$ 為 85 的最小非一因子且令 $a>1$，
$a-10=-5$，$a=5$。
(b) $(2a+17,5a+2) = 5(2a+17)-2(5a+2) = 81$
所以 $2a+17$ 為 81 的最小非一因子且令 $a>1$，
$2a+17=27$，$a=5$。
(c) $(a+1,10-3a) = 3(a+1)+(10-3a) = 13$
所以 $a+1$ 為 13 的最小非一因子且令 $a>1$，
$a+1=13$，$a=12$。

11. 因為 $n^6+8 = (n^2)^3+2^3 = (n^2+2)(n^4+2n^2+4)$
故 n^6+8 為 n^2+2 的倍數。
若得使 n^6+206 可被 n^2+2 整除，即 198 可被 n^2+2 整除。
由於 $198=2\times3^2\times11$，在其因子中，得使 n 為正整數：
$n^2+2=3$，$n=1$；　$n^2+2=6$，$n=2$；
$n^2+2=11$，$n=3$；　$n^2+2=18$，$n=4$；
$n^2+2=66$，$n=8$；　$n^2+2=198$，$n=14$。
故總和為 $1+2+3+4+8+14=32$。

12. 令 $d=(a,c)$，且 $a=dx, c=dy$，$(x,y)=1$。

$ab+bc-ca = 0$

$b = \frac{ac}{a+c} = \frac{dxy}{x+y}$

因為 $(x,y)=1$，所以 d 為 $x+y$ 的倍數故 $d>1$。

$a-c = d(x-y) = 101$

因為 101 為素數，所以 $d=101$。

另 $x+y$ 為 d 的因子，即 $x+y=101$。

解 $\begin{cases} x+y=101 \\ x-y=1 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x=51 \\ y=50 \end{cases}$。

故 b $= \frac{dxy}{x+y} = \frac{101\times 50\times 51}{101} = 2550$。

如果命運是頑石，我就化作大鐵鎚，將它砸得粉碎。

瑞士數學家、物理學家
歐拉
(Leonhard Euler 1707-1783)