「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

數論 － 整除性

摘要

1. 淺介整除性：
   若 $n|a$ 及 $n|b$，則
   (a) $n|(k_1a \pm k_2b)$
   (b) $n^2|ab$
2. 認識 20 以內各數的倍數的判別方法：
   (a) $2^n, 5^n$ 的倍數，檢查末 n 位是否 $2^n, 5^n$ 的倍數。
   (b) 3, 9 的倍數，檢查數字總和是否 3, 9 的倍數。
   (c) 7, 11, 13 的倍數，把一數自個位起三個數字一組一組的分開，再把各組數字正負相隔加起來，且看這總和是否 7, 11, 13 的倍數。
   (d) 運用截尾法判斷 17 或 19 的倍數。
      (i) 若 $17|(a \times 10 + b)$，則 $17|(a-5b)$。
      (ii) 若 $19|(a \times 10 + b)$，則 $19|(a+2b)$。
   (e) 運用同餘法判斷其他各數的倍數。
   (f) 某數 ab，其中 $(a,b)=1$，某數便俱有 a 和 b 的倍數的性質。以此方法判斷某數是否 6, 12, 14, 15 的倍數。
3. 認識數字問題或數字總和問題及其解法。
4. 淺介哈沙德（Harshad）數，即一數的數字總和可整除其本身，如 22、333、5050 等。
5. 認識迴文數（如 121, 3443, 56765 等）的性質及相關問題。

拾例

1. 若 $\overline{1974x0423}$ 為 7 的倍數，求 x 的值。

答： $7\,|\,\overline{1974x0423}$，

即 $7\,|\,197-\overline{4x0}+423 = 220-10x$。

故 $x=1,8$。

（註：$197410423=7\times28201489$，$197480423=7\times28211489$。）

2. 88 張成人車票總值為 \$ _293_ ，由於列印機壞了，五位數字的首尾兩個數字印不出來。已知每張車票的價值為 \$ P ，其中 P 為一整數，求 P 的值。（HKMO 2000/01 初賽個人）

答： 設車票總值為 $\overline{x293y}$，該數為 88，即 8 與 11 的公倍數。

因為該數可被 8 整除，所以 $8\,|\,\overline{93y}$，即 $y=6$。

再因為該數可被 11 整除，所以 $(x+9+6)-(2+3)=x+10$ 可被 11 整除，即 $x=1$。

$$P = \frac{12936}{88} = 147。$$

3. 試以截尾法判別 13579 是不是 17, 19 的倍數。

答： 若 $17\,|\,(a\times10+b)$，則 $17\,|\,(a-5b)$。

13579 => $1357-5\times9=1312$ => $131-5\times2=121$

=> $12-5\times1=7$

由於 7 不是 17 的倍數，故 13579 亦不是 17 的倍數。

若 $19\,|\,(a\times10+b)$，則 $19\,|\,(a+2b)$。

13579 => $1357+2\times9=1375$ => $137+2\times5=147$

=> $14+2\times7=28$。

由於 28 不是 19 的倍數，故 13579 亦不是 19 的倍數。

（註： 截尾值和原數的同餘性質不同。）

4.　試以同餘法判別 29393 是不是 17, 19 的倍數。

答：

萬	千	百	十	個
140 = 4	150 = 14	100 = 15	10	1
2	9	3	9	3
8	126	45	90	3

總和為 $8+126+45+90+3=272$。

由於 272 是 17 的倍數，故 29393 亦是 17 的倍數。

萬	千	百	十	個
120 = 6	50 = 12	100 = 5	10	1
2	9	3	9	3
12	108	15	90	3

總和為 $12+108+15+90+3=228$。

由於 228 是 19 的倍數，故 29393 亦是 19 的倍數。

(註： $29393=17\times19\times91$，

若考慮負的同餘值，可減省計算時間。

總和值和原數的同餘性質相同。)

5.　試以 5、6、7、8、9、0 各一個，組成一個六位數，而該六位數為 11 的倍數。求符合要求的六位數的最大值和最小值。

答：　由於 $5+6+7+8+9+0=35$，所以該五位數的奇數位之和與偶數位之和之差可以為 11、33。

但若要兩組數位之和之差為 33 ，那兩組數位之和只可以為 34 和 1，這是不可能的。故奇數位之和與偶數位之和只可以為 11。

這樣兩組數位之和是 23 和 12。

這樣，我們把五個數分成兩組，6,8,9 與 5,7,0。

要使這六位數最小，其首位必為 5，即 560879。

要使這六位數最大，其首位必為 9，即 978560。

(註：$560879=11\times50989$，$978560=11\times88960$。)

6.　設 n 為最小的整數可被 2 及 3 整除，而該數在十進制的表示式中只有數字 2 及 3 組成，且每種數字至少有一個。求 n 的最小值。

答：　由於個位必為 2，故得使用三個 2 和一個 3。

故最小值為 2232。

(註： $2232=2\times3\times372$。)

7. 設 N 為 8 的最大整倍數，其中 N沒有兩個數字相同，求 N 除以 1000 的餘數。(AIME 2003)

答： 由於 N 沒有數字相同，即 N 最大為 10 位數， 0 至 9 各出現一次。
要使 N 最大，N 的右邊三個位數必得由最小的 0、1、2 組成。
當中 120 可被 8 整除，故 N 除以 1000 的餘數為 120。
(N = 9876543120 = 8×1234567890)

8. 求最小整數 n，使 2011n 的最後四位數字是 0129。
(培正 2011 初賽中三)

答： 不難得知 n 的個位是 9，而 $2011\times9\equiv8099(\text{mod}\,10000)$。
要使十位為 2 ，我們得在 8099 上加上 30 ，即 n 的十位是 3，
而 $2011\times39\equiv8429(\text{mod}\,10000)$。
要使百位為 1 ，我們得在 8429 上加上 700 ，即 n 的百位是 7，
而 $2011\times739\equiv6129(\text{mod}\,10000)$。
要使千位為 0 ，我們得在 6129 上加上 4000 ，即 n 的千位是 4，
而 $2011\times4739\equiv0129(\text{mod}\,10000)$。
所以 n 的最小值為 4739。
(註： $2011\times4739=9530129$。)

9. 以 $P(n)$ 和 $S(n)$ 分別表示正整數 n 的數字乘積及數字之和，如 $P(23)=6$、 $S(23)=5$。設 N 為一兩位數使 $N=S(N)+P(N)$，求 N 的個位數字。(AMC 10 2001)

答： 設 $N=\overline{ab}=10a+b$
$10a+b = a+b+ab$
$9a = ab$
因為 $a\neq0$，故個位數字 $b=9$。

10. 若把某整數反倒過來，結果和原數相同，我們稱此整數為迴文數。在 10 至 10000 中有多少個迴文數為 11 的倍數。

答： 兩位迴文數有 9 個，全是 11 的倍數。
三位迴文數有 $9\times10=90$ 個，
其中只有 121, 242, 363, 484, 616, 737, 858, 979 為 11 的倍數。
四位迴文數有 $9\times10=90$ 個，全是 11 的倍數。
故所求總和為 $9+8+90 = 107$。

淺問

1. 若下列九數的最小素因子均小於 20，試找出它們的最小素因子：

(a)	1114334111	(b)	2099906945	(c)	3434904907
(d)	4759329401	(e)	5354002134	(f)	6662226181
(g)	7596162019	(h)	8387953493	(i)	9876540123

2. 在 567 後添加三個數字組成一個六位數，使這六位數可被 3、4、5 整除。如果這個六位數六個數字個個不同，求該六位數的最小值。

3. 已知八位數 $\overline{810ab315}$ 是 63 的倍數，求 $a\times b$ 的值。

4. 若在三位數 A 加上 3 ，所得新數的三個數字之和為原先 A 的三個數字之和的三分之一。求有可能的數 A 的總和。（HKMO 1995/96 初賽團體）

5. $\overline{abcdefghij}$ 是一個十位數，其中 a 為 1 的倍數，$\overline{ab}$ 為 2 的倍數， $\overline{abc}$ 為 3 的倍數， $\overline{abcd}$ 為 4 的倍數， $\overline{abcde}$ 為 5 的倍數， $\overline{abcdef}$ 為 6 的倍數， $\overline{abcdefg}$ 為 7 的倍數， $\overline{abcdefgh}$ 為 8 的倍數， $\overline{abcdefghi}$ 為 9 的倍數， $\overline{abcdefghij}$ 為 10 的倍數。求所有符合要求的十位數。

6. 若把某整數反倒過來，結果和原數相同，我們稱此整數為迴文數，如 121, 3443, 56765, 890098 等。現在 1000 至 10000 間隨機抽取一個迴文數，求該數為 7 的倍數的概率。（AMC 12 2010）

7. 設 S(n) 表示正整數 n 的各數位數字之和，如 S(2008) = 2+0+0+8 = 10。
   (a) 求 n 的最大值，使 $S(n)+n=2009$。
   (b) 求 S(1) + S(2) + S(3) + …… + S(1000) 的值。

8. 若一個正整數的各數字乘積為 18900。問：這樣的正整數是否存有最大值和最小值？若有，請求出。（CROMO 2007）

9. 若某數的數字總和可整除其自身，我們便稱該數為哈沙德數，如 333、4040、50505 等。找出一個最小的 9 的倍數，但不是哈沙德數。

10. 由 1 至 1000 內所有包含 "7" 這數字的整數的總和。(HKPSC 2002)

11. 求最小正整數 N 使 $15|N$ 及 N 只有 0 和 1 這兩個數字組成。

詳答

1. (a) 1114334111

   顯然，此數不是 2, 3, 5 的倍數。

   考慮 $1-114+334-111=110=11\times10$，

   故此數為 11 的倍數，不是 7 的倍數，即此數的最小素因子為 11。

   (註： $1114334111=11\times101\times1003001$。)

   (b) 2099906945

   顯然此數為 5 的倍數，不是 2 或 3 的倍數，

   即此數的最小素因子為 5。

   (註： $2099906945=5\times5557\times75577$。)

   (c) 3434904907

   顯然，此數不是 2, 3, 5 的倍數。

   考慮 $3-434+904-907=-434=7\times(-62)$，

   故此數為 7 的倍數，即此數的最小素因子為 7。

   (註： $3434904907=7\times701\times700001$。)

   (d) 4759329401

   顯然，此數不是 2, 3, 5 的倍數。

   考慮 $4-759+329-401=-827$，

   由於 −827 不是 7、11 或 13 的倍數，故此數不是上述三數的倍數。

   考慮 $475932940-5(1)=475932935$，

   $47593293-5(5)=47593268$，

   $4759326-5(8)=4759286$，

   $475928-5(6)=475898$，

   $47589-5(8)=47549$，

   $4754-5(9)=4709$，

   $470-5(9)=425$，

   $42-5(5)=17$。

   由於 17 為 17 的倍數，故此數的最小素因子為 17。

   (註： $4759329401=17\times757\times369829$。)

   (e) 5354002134

   顯然此數的最小素因子為 2。

   (註： $5354002134=2\times221\times2223\times5449$。)

1.　(f)　6662226181

顯然，此數不是 2, 3, 5 的倍數。

考慮 $6-662+226-181=-611=13\times(-47)$，

故此數為 13 的倍數，不是 7 或 11 的倍數，

即此數的最小素因子為 13。

(註：$6662226181=13\times997\times514021$。)

(g)　7596162019

顯然，此數不是 2, 3, 5 的倍數。

考慮 $7-596+162-019=-446$，

由於 -446 不是 7、11 或 13 的倍數，故此數不是上述三數的倍數。

160=7	50=16	90=5	60=9	40=6	140=4	150=14	100=15	10	1
7	5	9	6	1	6	2	0	1	9
49	80	45	54	6	24	28	0	10	9

故總和為 $49+80+45+54+6+24+28+0+10+9=305$，

但 305 不是 17 的倍數，故 7596162019 亦不是 17 的倍數。

170=18	150=17	110=15	30=11	60=3	120=6	50=12	100=5	10	1
7	5	9	6	1	6	2	0	1	9
126	85	135	66	3	36	24	0	10	9

總和為 $126+85+135+66+3+36+24+0+10+9=494$，

因 494 是 19 的倍數，故 7596162019 是 19 的倍數。

即 其最小素因子為 19。

(註：$7596162019=19\times1999\times199999$。)

(h)　8387953493

顯然，此數不是 2, 3, 5 的倍數。

考慮 $8-387+953-493=81$，

由於 81 不是 7、11 或 13 的倍數，故此數不是上述三數的倍數。

-10=7	50=-1	-80=5	60=-8	40=6	-30=4	-20=-3	-70=-2	10=-7	1
8	3	8	7	9	5	3	4	9	3
56	-3	40	-56	54	20	-9	-8	-63	3

故總和為 $56-3+40-56+54+20-9-8-63+3=34$，

由於 34 是 17 的倍數，故 8387953493 是 17 的倍數。

即 其最小素因子為 17。

(註：$8387953493=17\times2777\times177677$。)

1. (i) 9876540123

顯然，此數不是 2 的倍數。

數字之和 = 9+8+7+6+5+4+0+1+2+3 = 45。

即此數為 3 的倍數，其最小素因子為 3。

(註： $9876540123 = 3^2 \times 491 \times 593 \times 3769$ 。)

2. 設該六位數為 $\overline{567abc}$ 。

因為該六位數可被 3、4、5 整除，

所以 $5+6+7+a+b+c=3k$ ，即 $a+b+c=3m$

再者 $\overline{bc}=4n$ ，

另 $c=5$ 或 0。

但 $c \neq 5$ ，因為這樣不是 4 的倍數。

故取 $c=0$ ，則 $b=0,2,4,6,8$ ，而對應的 $a=3,1,2,0,1$ ，

由於該六位數的六個數字個個不同，故當中的最小值為 567120。

(註： 567120 = $3 \times 4 \times 5 \times 9452$)

3. 因為 $63 = 7 \times 9$ 。

所以 $\overline{810ab315}$ 是 9 的倍數，即 $8+1+0+a+b+3+1+5$ 是 9 的倍數，

即 $a+b=9$ 或 $a=b=9$ 。

由於 $\overline{810ab315}$ 是 7 的倍數，即 $81-\overline{ab}+315$ 為 7 的倍數。

得 $396-(10a+b)$ 是 7 的倍數。

即 $10a+b$ 為 7 的倍數加 4。

$10a+b = 4,11,18,25,32,39,46,53,60,67,74,81,88,95$ 。

當中符合 $a+b=9$ 或 $a=b=9$ 的，僅為 18 或 81。得 $a \times b = 8$ 。

(註： $81018315 = 1286005 \times 63$， $81081315 = 63 \times 1287005$)

4. 設該三位數為 $\overline{abc}$。

顯然 $c\ge 7$，因為若 $c\le 6$ 則該數加 3 以後，數碼之和不減反增。

同時不能有 $a=9$ 且 $b=9$，因為這時當 $c\ge 7$，把該數加 3 之後，

其數字總和為 $c+3-10+1=c-6$。

由題意得 $\frac{1}{3}(c+18) = c-6$

解得 $c = 18$。 這是不可能的。

若 $a<9$, $b=9$, $c\ge 7$，這時有

$$\frac{1}{3}(a+9+c) = (a+1)+0+(c+3-10)$$

$$2a+2c = 27$$ 。

奇偶性不相同，這是不可能的。

若 $b<9$, $c\ge 7$，這時有

$$\frac{1}{3}(a+b+c) = a+(b+1)+(c+3-10)$$

$$a+b+c = 9$$

再考慮 $a\ge 1$，我們有三位數 117, 207, 108，而總和則為 432。

5. 由於 5 的倍數和 10 的倍數的性質，得 $e=5, j=0$。

由於 2 的倍數的性質， b,d,f,g 為 2, 4, 6, 8 其中之一。

由於 4 的倍數的性質， 及 c 為奇， d 只可為 2 或 6。

由於 3 的倍數的性質， $\overline{abc},\overline{def},\overline{ghi}$ 均為 3 的倍數。

然而 $e=5$，所以 $\overline{def}=258,654$。

若 $\overline{def}=258$， $\overline{ghi}=147,741,369,963$。

但由於 $8|\overline{fgh}$，故只得 $\overline{ghi}=963$ 合題意。

這樣 $\overline{abc}=147,741$，

但 $\overline{abcdefg}=1472589,7412589$，但兩數均不是 7 的倍數。

所以 $\overline{def}\ne 258$。

若 $\overline{def}=654$， $\overline{ghi}=123,321,327,723,183,381,129,921,729,927$。

但由於 $8|\overline{fgh}$，故只得 $\overline{ghi}=321,723,729$ 合題意。

若 $\overline{ghi}=321$，即 $\overline{abc}=789,987$，

$\overline{abcdefg}=7896543,9876543$，但兩數均不是 7 的倍數。

若 $\overline{ghi}=723$，即 $\overline{abc}=189,981$，

$\overline{abcdefg}=1896547,9816547$，但兩數均不是 7 的倍數。

若 $\overline{ghi}=729$，即 $\overline{abc}=183,381$，

$\overline{abcdefg}=1836547,3816547$，當中只有 $3816547=7\times 545221$ 為 7 的倍數。

所以所求的數是 3816547290。

6. 符合抽取條件的迴文數，即四位迴文數，為 $\overline{abba}$，其中 $a \neq 0$。
故該迴文數 = $a \times 1000 + b \times 100 + b \times 10 + a$。
此數合共有 $9 \times 10 = 90$ 個。
若 $7 | \overline{abba}$，即 $7 | (b \times 100 + b \times 10 + a - a)$，$7 | 110b$。
但由於 (7, 110)=1，故 $7 | b$，可取值為 $b = 0,7$。
即能被 7 整除的「迴文數」有 $9 \times 2 = 18$ 個。
故所求概率為 $\frac{18}{90} = \frac{1}{5}$。

7. (a) 基本上，當 n 的個位不是 9 時，$S(n+1) > S(n)$。
若 $n \geq 2000$，
令 $n = \overline{200k}$，式中的 k 為一整數介乎 0 至 9 之間。
則 $S(n) + n = 2 + k + 2000 + k$ = $2002 + 2k$
若令 $2002 + 2k$ = 2009，則得 $k = 3.5$。
故不可能存在 $n \geq 2000$，使 $S(n) + n = 2009$。
若 $2000 > n \geq 1990$，令 $n = \overline{199k}$。
則 $S(n) + n = 19 + k + 1990 + k$ = $2009 + 2k$
若令 $2009 + 2k$ = 2009，則得 $k = 0$。
故解為 $n = 1990$。

(b) 把 1 視作 001，2 視作 002，如此類推。
把 000 至 999 的各數位分離分析：當中個位為 1 的數有 100 個，個位為 2 的也一樣，如此類推。
故各個位總和為 $(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 0) \times 100$。
而各十位總和及各百位總和也是一樣。
故該總和為 $4500 \times 3 - S(000) + S(1000)$ = 4501。

8. 18900 = $2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$
從素因子 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, 7 中挑選合適的乘在一起，使總的數位最小。
由於 $2 \times 2 = 4$、$2 \times 3 = 6$ 或 $3 \times 3 = 9$ 可使數位減少。
最終可由 9 個數減至 6 個數，
如 {3, 4, 5, 5, 7, 9} 或 {3, 5, 5, 6, 6, 7} 或 {2, 5, 5, 6, 7, 9}
當中的最小值為 255679。
但由於可在數字乘積為 18900 的整數中任意加插 1，而保持乘積不變。
故該數不存在最大值。

9. 9 的倍數的數字之和為 9 的倍數，
若某 9 的倍數的數字之和為 9，該數自然為哈沙德數。
但若某 9 的倍數的數字之和不是 9，
那數便有可能不是哈沙德數了。
第一個數字之和不是 9 的 9 的倍數為 99 ，其數字之和為 18，
但 18 不能整除 99，故 99 不是哈沙德數。

10. 先把所有含有 7 的數字分類。
由 700 – 799，總和為 $\frac{1}{2}(799)(800)-\frac{1}{2}(699)(700) = 74950$，
由 70 – 79，總和為 $\frac{1}{2}(79)(80)-\frac{1}{2}(69)(70) = 745$，
由此所尾兩位為 70 – 79（不包括 700 – 799 間的）的總和為：

$$745\times9+10\times(100+200+300+400+500+600+800+900)$$
$$= 44705$$

而所有個位為 7（不包括上述兩情況）的總和為：

$$9\times(7+17+27+37+47+57+67+87+97)$$
$$+9(100+200+300+400+500+600+800+900)$$
$$= 38187$$

所以總和為 $74950+44705+38187=157842$。

11. $15|N$，使得 $3|N$ 及 $5|N$。
由於 $5|N$，故 N 的個位為 0。
另由於 $3|N$，故 N 的數字之和為 3 的倍數。
即 N 的數字中最小有 3 個 1 ，故最小值為 1110。
（註： $1110=15\times74$ ）

問題是數學的心臟。

美籍匈牙利裔數學家

哈爾莫斯 (Paul Halmos 1916-2006)