「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

數論 – 完全冪

摘要

1. 認識整數冪數的同餘性質。
2. 認識整數冪數的素因子連乘式的特性。
3. 平方差恒等式（$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$）的運用。
4. 利用素因子分解式找出因子冪和：

   若 $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_n^{a_n}$，

   (a) 因子平方和 $\sigma_2(N)$

   $$= (1 + p_1^{2} + p_1^{4} + \ldots + p_1^{2a_1})(1 + p_2^{2} + p_2^{4} + \ldots + p_2^{2a_2}) \ldots (1 + p_n^{2} + p_n^{4} + \ldots + p_n^{2a_n})$$

   $$= \frac{p_1^{2a_1+2} - 1}{p_1^{2} - 1} \times \frac{p_2^{2a_2+2} - 1}{p_2^{2} - 1} \times \frac{p_3^{2a_3+2} - 1}{p_3^{2} - 1} \times \ldots \times \frac{p_n^{2a_n+2} - 1}{p_n^{2} - 1}$$

   (b) 因子立方和 $\sigma_3(N)$

   $$= (1 + p_1^{3} + p_1^{6} + \ldots + p_1^{3a_1})(1 + p_2^{3} + p_2^{6} + \ldots + p_2^{3a_2}) \ldots (1 + p_n^{3} + p_n^{6} + \ldots + p_n^{3a_n})$$

   $$= \frac{p_1^{3a_1+3} - 1}{p_1^{3} - 1} \times \frac{p_2^{3a_2+3} - 1}{p_2^{3} - 1} \times \frac{p_3^{3a_3+3} - 1}{p_3^{3} - 1} \times \ldots \times \frac{p_n^{3a_n+3} - 1}{p_n^{3} - 1}$$

   (c) 因子 k 次方和 $\sigma_k(N)$

   $$= (1 + p_1^{k} + p_1^{2k} + \ldots + p_1^{ka_1})(1 + p_2^{k} + p_2^{2k} + \ldots + p_2^{ka_2}) \ldots (1 + p_n^{k} + p_n^{2k} + \ldots + p_n^{ka_n})$$

   $$= \frac{p_1^{ka_1+k} - 1}{p_1^{k} - 1} \times \frac{p_2^{ka_2+k} - 1}{p_2^{k} - 1} \times \frac{p_3^{ka_3+k} - 1}{p_3^{k} - 1} \times \ldots \times \frac{p_n^{ka_n+k} - 1}{p_n^{k} - 1}$$

拾例

1. 若 $444444-888=x^2$，求正整數 x 的值。

答： $x^2 = 444(1001-2) = 444\times999 = 4\times9\times111\times111$

$= 666^2$

所以 $x=666$。

2. 若兩正整數 M,N 滿足於 $M^2-N^2=2011$，求 N 的值。 (SAMO-S 2011)

答： $M^2-N^2=(M-N)(M+N)=2011$，由於 2011 為素數，

故得$\begin{cases} M-N=1 \\ M+N=2011 \end{cases}$，

解得 $N=1005$。

3. *設方程 $x^2-y^2=1988$ 共有 n 組整數解。求 n 的值。

(中國江蘇省初中數學競賽 1988)

答： 先求方程的正整數解。

$(x-y)(x+y)=2^2\times7\times71$。

由於 $(x-y),(x+y)$ 的奇偶性相同，

所以有 $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=2\times7\times71 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-y=2\times7 \\ x+y=2\times71 \end{cases}$。

由於 x,y 可正可負，故有解 $2\times4=$ 8 組，即 $n=8$。

4. 設 c 為一素數。若 $11c+1$ 為一整數的平方，求 c 之值。

(HKMO 1998/99 決賽團體)

答： 設 $n^2=11c+1$

$n^2-1 = (n-1)(n+1) = 11c$

$\begin{cases} n-1=11 \\ n+1=c \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n-1=c \\ n+1=11 \end{cases}$

$\begin{cases} n=12 \\ c=13 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n=10 \\ c=9 \end{cases}$ (捨去)

故得 $c=13$。

5. (a) 若正整數 n 使 $n^2+10n+10$ 為完全平方數，求 n 的值。

(b) 若正整數 n 使 $n^2+9n+10$ 為完全平方數，求 n 的值。

答： (a) 設

$$\begin{aligned}n^2+10n+10 &= x^2 \text{（其中 x 為整數。）}\\(n+5)^2+10-5^2 &= x^2\\(n+5)^2-15 &= x^2\\(n+5)^2-x^2 &= 15\\(n-x+5)(n+x+5) &= 15\end{aligned}$$

由於 $15=3\times 5$，

所以 $\begin{cases}n-x+5=1\\n+x+5=15\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n-x+5=15\\n+x+5=1\end{cases}$

或 $\begin{cases}n-x+5=3\\n+x+5=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n-x+5=5\\n+x+5=3\end{cases}$

$\begin{cases}n-x=-4\\n+x=10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n-x=10\\n+x=-4\end{cases}$

或 $\begin{cases}n-x=-2\\n+x=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n-x=0\\n+x=-2\end{cases}$

得解 $\begin{cases}n=3\\x=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n=3\\x=-7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n=-1\\x=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n=-1\\x=-1\end{cases}$

故只有解 $n=3$。

(b) 設

$$\begin{aligned}n^2+9n+10 &= x^2 \text{（其中 x 為整數。}\\4n^2+36n+40 &= 4x^2\\(2n+9)^2+40-9^2 &= 4x^2\\(2n+9)^2-41 &= 4x^2\\(2n+9)^2-(2x)^2 &= 41\\(2n-2x+9)(2n+2x+9) &= 41\end{aligned}$$

因為 41 為素數，

故 $\begin{cases}2n-2x+9=1\\2n+2x+9=41\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2n-2x+9=41\\2n+2x+9=1\end{cases}$

$\begin{cases}n-x=-4\\n+x=16\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n-x=16\\n+x=-4\end{cases}$

得解 $\begin{cases}n=6\\x=10\end{cases}$ 或 $\begin{cases}n=6\\x=-10\end{cases}$

故只有解 $n=6$。

（註： 提示 $a^2+k=b^2$ 的情況。）

6.　刪去正整數數列 1, 2, 3, ……中的所有完全平方數，得到一個新數列，求這個新數列的第 2003 項。（高數聯 2003）

答：　由於 $\left\lfloor\sqrt{2003}\right\rfloor = 44$，所以在 2003 以內有 44 個平方數刪除了。

2003 + 44 = 2047，但在 2047 內有又另一個平方數 $45^2 = 2025$，

所以第 2003 項應是 2048。

7.　有多少個完全平方數為 $1!\times 2!\times 3!\times \ldots \times 9!$ 的因子？

(AMC 12 2003)（中國北京市中學生數學競賽 2009 初二初賽）

(HKMHASC 2012/13)

答：

$1! = 1$

$2! = 2$

$3! = 2\times 3$

$4! = 2^3\times 3$

$5! = 2^3\times 3\times 5$

$6! = 2^4\times 3^2\times 5$

$7! = 2^4\times 3^2\times 5\times 7$

$8! = 2^7\times 3^2\times 5\times 7$

$9! = 2^7\times 3^4\times 5\times 7$

所以 $1!\times 2!\times 3!\times \ldots \times 9! = 2^{7+7+4+4+3+3+1+1}\times 3^{4+2+2+2+1+1+1}\times 5^{1+1+1+1+1}\times 7^{1+1+1}$

$= 2^{30}\times 3^{13}\times 5^5\times 7^3$

所以符合條件的完全平方數必為 $2^{2a}\times 3^{2b}\times 5^{2c}\times 7^{2d}$，

其中 a, b, c, d 均為整數且 $0\le a\le 15$、$0\le b\le 6$、$0\le c\le 2$、$0\le d\le 1$。

所以符合條件的完全平方數的數目為 $16\times 7\times 3\times 2 = 672$。

8.　若 m, n 為正整數使 $333m = n^3$，求 $m+n$ 的最小可能值。

答：　因為 $333 = 3^3\times 37$，

故取 $m = 37^2 = 1369, n = 3\times 37 = 101$，即 $m+n = 1369+101 = 1470$。

9.　有多少個少於 10^6 的完全平方數為 99 的倍數？

答：　由於 $99 = 3^2\times 11$，

所以最小的完全平方數且為 99 的倍數為 $3^2\times 11^2 = 1089$。

所以為 99 的倍數的完全平方數必同時為 1089 的倍數。

由於 $\left[\dfrac{1000000}{1089}\right] \approx 900$。

再看 $900 = 30^2$，故所求的數目為 30。

10.　(a)　求 1000 的所有因子的平方和。

　　(b)　求 1000 的所有平方數因子的總和。

答：　(a)　$1000 = 2^3 \times 5^3$，

故因子平方和 $\sigma_2(1000) = (1+2^2+2^4+2^6)(1+5^2+5^4+5^6)$

$= 85 \times 16276 = 1383460$。

　　(b)　設 1000 的平方數因子為 $2^{2a} \times 5^{2b}$，故 a,b 分別只可取 0 或 1，

即其平方數因子僅有 $1, 2^2, 5^2, 2^2 \times 5^2$，

故所求總和為 $(1+2^2)(1+5^2) = 5 \times 26 = 130$。

我們越接近目標，困難便越大。

Difficulties increase the nearer we approach our goal.

德國詩人、自然科學家、政治家

歌德

(Johann Wolfgang von Goethe 1749-1832)

淺問

1. 設 n 為正整數且 $n!+3$ 為一完全平方數，求 n 的值。

2. 若 $n=2^{12}\times3^{13}\times5^{15}$，問 n 有多少個因子為
   (a) 完全平方數； (b) 完全立方數。

3. 正整數 n 使得 $n^2+5n+13$ 是一個完全平方數，求 n 的值。

4. 整數 x 減去 12 後是一個整數的平方。將 x 加上 19 後，則是另一個整數的平方。求 x 的值。(HKMO 2010/11 初賽個人)

5. 若 x,y 為正整數，且 $x^2=y^2+2000$，求 x 的最小值。
   (HKMO 1994/95 初賽團體)

6. 若四位數 $\overline{abcd}$ 為一完全平方數且乎合 $b=a-1,c=b+3,d=c+1$，求此四位數。

7. 已知 2008 個連續正整數的和是一完全平方數，求其中的最大數的最小值。

8. 英國數學家德摩根 (Augustus De Morgan) 出生於 19 世紀前半葉，於 x^2 年時，他的年齡為 x，問德摩根出生於哪一年？

9. 求所有這樣的四位數，在這四位數的左邊寫上 400 後，是整數的平方。
   (KMO 1954)

10. 若 n 為一個完全立方數，且為 75 的正倍數，求 n 的最小值。

11. 求所有使 $2^4+2^7+2^n$ 為完全平方數的 n。 (CROMO 2005)

12. 求下列各數的因子平方和及因子立方和：
    (a) 32 (b) 100 (c) 210 (d) 333

13. 若 a 為一整數，且 $a^7=8031810176$ ，求 a 的值。
    (HKMO 1992/93 初賽團體)

14. 若 $2^a\times9^b$ 為一四位數，其千位數為 2、百位數為 a、十位數為 9、個位數為 b。求 a 及 b 。 (HKMO 1994/95 決賽團體)

詳答

1. 我們可以從個位來分析該數是否完全平方數，若該數的個位是 2, 3, 5, 7, 8，則該數一定不是完全平方數。
   若 $n \geq 5$，$n!+3$ 的個位是 3 ，一定不是完全平方數。
   在 $n = 1,2,3,4$，我們得 $n!+3 = 4,5,9,27$，故當中的完全平方數有 4 或 9，所以 n = 1 或 3。

2. (a) n 的完全平方數因子為 $2^{2a} \times 3^{2b} \times 5^{2c}$， 其中 $0 \leq a \leq 6$、$0 \leq b \leq 6$、$0 \leq c \leq 7$，且 a, b, c 均為整數。
   故 n 的完全平方數因子個數為 (6+1)(6+1)(7+1) = 392。
   (b) n 的完全立方數因子為 $2^{3d} \times 3^{3e} \times 5^{3f}$， 其中 $0 \leq d \leq 4$、$0 \leq e \leq 4$、$0 \leq f \leq 5$，且 d, e, f 均為整數。
   故 n 的完全立方數因子個數為 (4+1)(4+1)(5+1) = 150。

3. 由於 $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$ 及 $(n+4)^2 = n^2 + 8n + 16$。
   所以 $(n+2)^2 < n^2 + 5n + 13 < (n+4)^2$，
   故若 $n^2 + 5n + 13$ 為一完全平方數，
   即 $n^2 + 5n + 13 = n^2 + 6n + 9$
   $n = 4$
   (註： $n^2 + 5n + 13 = (4)^2 + 5(4) + 13 = 49 = 7^2$)

4. $x - 12 = a^2$ 及 $x + 19 = b^2$（其中 a, b 均為正整數。）
   $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) = 31$
   即 $(b-a) = 1$ 及 $(b+a) = 31$
   解得 $a = 15, b = 16$，故 $x = 15^2 + 12 = 237$。

5. $x^2 - y^2 = 2000$
   $(x+y)(x-y) = 2000$
   而 $2000 = 1 \times 2000 = 2 \times 1000 = 4 \times 500 = 5 \times 400 = 8 \times 250$
   $= 10 \times 200 = 16 \times 125 = 20 \times 100 = 25 \times 80 = 40 \times 50$
   但由於 $(x+y), (x-y)$ 的奇偶性相同，故只可取
   $2 \times 1000, 4 \times 500, 8 \times 250, 10 \times 200, 20 \times 100, 40 \times 50$
   當中以 $\begin{cases} x + y = 50 \\ x - y = 40 \end{cases}$ 中的 x 值最小，解得 $x = 45$。

6. 該四位數 $= 1000(b+1)+100b+10(b+2)+(b+3)$

$= b(1111)+1023$

$= 11(101b+93)$

因此該四位數為 11 的倍數，即 $101b+93$ 亦是 11 的倍數。

而 $101b+93 = 11(9b+8)+2b+5$，所以 $2b+5$ 亦是 11 的倍數。

亦因為 $b+3\le 9$，即 $2b+5\le 17$，所以取 $2b+5=11$，得 $b=3$。

故該四位數為 4356。

（註： $4356=66^2$）

7. 設該連續正整數的首數為 a

即 $a+(a+1)+(a+2)+...+(a+2007) = \frac{2008}{2}\times(a+a+2007)$

$= 1004(2a+2007)$

$= 2^2\times 251\times(2a+2007)$

所以 $251\times(2a+2007)$ 為一完全平方數，即 $2a+2007=251n^2$。

顯然 $n=1,2$，$251n^2<2007$ ，故無解。

但當 $n=3$，$251(3)^2=2259$，即 $a=126$。故該連續數由 126 起，最大值為 $a+2007=126+2007=2133$。

8. 由題目知 $1800 < x^2 < 1900$

試算得 $43 \le x \le 43$

所以取 $x=43, x^2=1849$，迪摩根出生於 $1849-43=1806$ 年。

（註：德摩根（Augustus De Morgan 1806-1871）英國數學家，成就之一為將數學歸納法的概念嚴格法。）

9. 設該四位數為 $\overline{abcd}$，即 $\overline{400abcd}$ 為一整數的平方。

由於 4000000 為 2000 的平方，所以設 $\overline{400abcd}=(\overline{20xy})^2$。

$4000000+\overline{abcd} = (2000+\overline{xy})^2$

$= 4000000+4000\times\overline{xy}+(\overline{xy})^2$

$\overline{abcd} = 4000\times\overline{xy}+(\overline{xy})^2$

由此 $\overline{xy}$ 只可取 1 或 2。

所以所求四位數為 4001 或 8004。

（註： $4004001=2001^2, 4008004=2002^2$）

10. 由於 $75=3\times 5^2$，故 n 的最小值為 $3^3\times 5^3=3375$。

11. 原式 $= 2^4(1+2\times 2^2+2^{n-4})$。

取 $n-4=4$，即 $n=8$。

即原式 $= [2^2\times(2^2+1)]^2$。（註： $16+128+512=656=26^2$）

驗算得知， $n\le 7$，無解。當 $n\ge 9$ 時，原式亦無解，因

$(2^{\frac{n-4}{2}}+1)^2 \ge (1+2\times 2^2+2^{n-4}) \ge 2^{\frac{n-4}{2}}$。所以原式僅一解。

12. (a) $32=2^5$

因子平方和 $= 1+2^2+2^4+2^6+2^8+2^{10} = \dfrac{2^{12}-1}{2^2-1}$

$= 1365$

因子立方和 $= 1+2^3+2^6+2^9+2^{12}+2^{15} = \dfrac{2^{18}-1}{2^3-1}$

$= 37449$

(b) $100=2^2\times 5^2$

因子平方和 $= (1+2^2+2^4)(1+5^2+5^4) = 21\times 651$

$= 13671$

因子立方和 $= (1+2^3+2^6)(1+5^3+5^6) = 73\times 15751$

$= 1149823$

(c) $210=2\times 3\times 5\times 7$

因子平方和 $= (1+2^2)(1+3^2)(1+5^2)(1+7^2)$

$= 5\times 10\times 26\times 50 = 65000$

因子立方和 $= (1+2^3)(1+3^3)(1+5^3)(1+7^3)$

$= 9\times 28\times 126\times 344 = 10922688$

(d) $333=3^2\times 37$

因子平方和 $= (1+3^2+3^4)(1+37^2) = 91\times 1370$

$= 124670$

因子立方和 $= (1+3^3+3^6)(1+37^3) = 757\times 50654$

$= 38345078$

13. 因為 a^7 的個位為 6，所以 a 的個位為 6。

$6^7=279936\approx 300000$

$a^7=8031810176\approx 8000000000$ 約為 6^7 的 30000 倍。

另 $4^7<30000<5^7$，故 $4\times 6<a<5\times 6$，即 $a=26$。

14. $2^a \times 9^b = \overline{2a9b} = 2090 + 100a + b$

若 $a = 0$，即 $9^b = 2090 + b$，但由於 $9^3 = 729, 9^4 = 6561$，故無解。

但若 $a \neq 0$，b 只可為 2, 4, 6, 8。

但由於 $9^4 = 6561 > 3000$，故 b 只可取 2。

$2^a \times 9^2 = 2092 + 100a$

由於四位數的個位為 2，故 a 只可取 1, 5, 9，按數值只可取 5。

即 $a = 5, b = 2$。$2^5 \times 9^2 = 32 \times 81 = 2592$。

人類的思想是永無止境的。

德國詩人、自然科學家、政治家

歌德

(Johann Wolfgang von Goethe 1749-1832)