「噢！數？」拾例集　周浩然輯

數論 – 高斯函數

摘要

1. 認識高斯（Gauss）函數 $[x]$ 的定義及性質。
   （a）$[x]$ 為不大於 x 的最大整數。
   （b）$[x] \le x < [x]+1$
   （c）$[x]+[y] \le [x+y]$
2. 以分組法求出含有高斯函數的數列總和。
3. 解含有高斯函數的方程，如 $[f(x)] = g(x)$。

4. 計算 $n!$ 與 $n!!$的素因子分解式及末位零數目：

(a) $n!$：

(i) 定義 $n!=\begin{cases} n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1 & n\geq 1 \\ 1 & n=0 \end{cases}$

(ii) $n!$ 的素因子分解式中

素數 p 的指數 $p(n!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$。

(iii) $n!$ 的末位連續出現的零的數目為 $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{5^i}\right]$。

(b) $n!!$：

(i) 定義 $n!!=\begin{cases} n\times(n-2)\times(n-4)\times\ldots\times 2 & n\geq 1, n=2k \\ n\times(n-2)\times(n-4)\times\ldots\times 1 & n\geq 1, n=2k+1 \\ 1 & n=0 \end{cases}$

(ii) 當 n 為偶數時， $n!!=2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!$。

$n!!$ 的素因子分解式中

奇素數 p 的指數 $p(n!!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2p^i}\right]$。

2 的指數 $p(2)=\frac{n}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^{i+1}}\right]$。

(iii) 當 n 為奇數時，$n!!=\frac{(n+1)!}{(n+1)!!}$

分別找出 $(n+1)!,(n+1)!!$ 的素因子分解式，再求各素數指數之差。

奇素數 p 的指數 $p(n!!)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{2p^i}\right]$。

2 的指數為 0 ，即該數必為奇數。

拾例

1. 若 $A=\left[\dfrac{2008\times80+2009\times130+2010\times180}{2008\times15+2009\times25+2010\times35}\right]$，求 A 的值。

(HKMO 2008/09 決賽團體)

答： A = $\left[5+\dfrac{2008\times5+2009\times5+2010\times5}{2008\times15+2009\times25+2010\times35}\right]$ = 5

2. 求分數 $\dfrac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}$ 的整數部分。

答： $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ > $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ > $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$

1 > $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ > $\frac{1}{2}$

1 < $\dfrac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}$ < 2

所以 $\dfrac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}$ 的整數部分為 1。

3. 求不超過 $(\sqrt{7}+2)^6$ 的值的最大整數。

答： 設 $x=\sqrt{7}+2, y=\sqrt{7}-2$，

得 $\begin{cases} x+y=2\sqrt{7} \\ xy=3 \end{cases}$，

x^2+y^2 = $(x+y)^2-2xy$ = $(2\sqrt{7})^2-2(3)$ = 22。

x^6+y^6 = $(x^2+y^2)^3-3(xy)^2(x^2+y^2)$

= $(22)^3-3(3)^2(22)$ = 10054

由於 $0<\sqrt{7}-2<1$，故 $0<(\sqrt{7}-2)^6<1$，

所以所求的最大整數為 10053。

4.　若 $R=\lfloor\sqrt{1}\rfloor+\lfloor\sqrt{2}\rfloor+\lfloor\sqrt{3}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt{99}\rfloor$，求 R 的值。

(HKMO 2001/02 決賽個人)

答：當 $n=1\sim3$，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = 1$，總和 為 $1\times3 = 3$；

當 $n=4\sim8$，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = 2$，總和 為 $2\times5 = 10$；

當 $n=9\sim15$，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = 3$，總和 為 $3\times7 = 21$；

當 $n=16\sim24$，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = 4$，總和 為 $4\times9 = 36$；

如此類推：

上式為 $1\times3+2\times5+3\times7+\ldots+9\times19 = 615$。

5.　求 $\left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right]+\left[\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right]+\left[\dfrac{4+\sqrt{4}}{4}\right]+\ldots+\left[\dfrac{1990+\sqrt{1990}}{1990}\right]$。

(希望杯 1990)

答：原式 $= \left[1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]+\left[1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]+\left[1+\dfrac{\sqrt{4}}{4}\right]+\ldots+\left[1+\dfrac{\sqrt{1990}}{1990}\right]$

$= 1989+\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]+\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]+\left[\dfrac{\sqrt{4}}{4}\right]+\ldots+\left[\dfrac{\sqrt{1990}}{1990}\right]$

$= 1989$

6.　求以下 1980 個數中共有多少個不同的值。

$$\left[\frac{1^2}{1980}\right]、\left[\frac{2^2}{1980}\right]、\left[\frac{3^2}{1980}\right]、...、\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$$ （ALSUMO 1980）

答：　設 $f(n)=\frac{n^2}{1980}$，

當 $n=2,3,4,...,990$ 時，

$$f(n)-f(n-1) = \frac{n^2}{1980}-\frac{(n-1)^2}{1980} = \frac{2n-1}{1980}<1$$

而 $[f(1)]=0$，$[f(990)]=\left[\frac{990^2}{1980}\right]=\left[\frac{990}{2}\right]=495$，

所以，自 0 至 495 的整數都能取得到。

當 $n=991,992,993,...,1980$ 時，

$$f(n)-f(n-1) = \frac{n^2}{1980}-\frac{(n-1)^2}{1980} = \frac{2n-1}{1980}>1$$

而 $[f(991)]=\left[\frac{991^2}{1980}\right]=\left[\frac{(990+1)^2}{1980}\right]=\left[495+1+\frac{1}{1980}\right]=496$，

$[f(1980)]=\left[\frac{1980^2}{1980}\right]=1980$，

所以，$\left[\frac{991^2}{1980}\right]、\left[\frac{992^2}{1980}\right]、\left[\frac{993^2}{1980}\right]、...、\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$

個個取值為不同的整數。

在 $\left[\frac{1^2}{1980}\right]、\left[\frac{2^2}{1980}\right]、\left[\frac{3^2}{1980}\right]、...、\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$ 中，

合共有 $495+990=1485$ 個不同的整數。

7.　已知方程 $[3x+1]=2x+\frac{3}{2}$ 的所有根的和為 S ，求 S 的值。

(HKMO 2000/01 決賽個人)

答：

$$2x+\frac{3}{2} \le 3x+1 < 2x+\frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2}$$

$$2(\frac{1}{2})+\frac{3}{2} \le 2x+\frac{3}{2} < 2(\frac{3}{2})+\frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{2} \le 2x+\frac{3}{2} < \frac{9}{2}$$

因為 $2x+\frac{3}{2}$ 為整數，故只可取值 3, 4。

若 $2x+\frac{3}{2}=3$，得 $x=\frac{3}{4}$；若 $2x+\frac{3}{2}=4$，得 $x=\frac{5}{4}$。

故 $S=\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=2$。

8.　*** 求方程 $4x^2-40[x]+51=0$ 的所有實數解。(CANMO 1999)

答：$4x^2+51=40[x]$，設 $[x]=n$，

$$4n^2+51 \le 40n < 4(n+1)^2+51$$

$$4n^2+51 \le 40n < 4n+8n+55$$

得 $\begin{cases} 4n^2-40n+51\le 0 \\ 4n^2-32n+55>0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} (2n-17)(2n-3)\le 0 \\ (2n-11)(2n-5)>0 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} \frac{3}{2}\le n\le\frac{17}{2} \\ n<\frac{5}{2}, n>\frac{11}{2} \end{cases}$

即 $\frac{3}{2}\le n<\frac{5}{2}$ 或 $\frac{11}{2}<n\le\frac{17}{2}$。

因為 n 為整數，故得 $n=2,6,7,8$，

代入 $x^2=\frac{40n-51}{4}$，即 $x^2=\frac{29}{4},\frac{189}{4},\frac{229}{4},\frac{269}{4}$。

故 $x=\frac{\sqrt{29}}{2},\frac{3\sqrt{21}}{2},\frac{\sqrt{229}}{4},\frac{\sqrt{269}}{4}$。

9.　在 10! 的所有正因子中

(a)　共有多少個？

(b)　有多少個為完全平方數？

答：(a)　設 $10! = (2^a)(3^b)(5^c)(7^d)$，

$$a = \left[\frac{10}{2}\right] + \left[\frac{10}{4}\right] + \left[\frac{10}{8}\right] = 5+2+1 = 8$$

$$b = \left[\frac{10}{3}\right] + \left[\frac{10}{9}\right] = 3+1 = 4$$

$$c = \left[\frac{10}{5}\right] = 2$$

$$d = \left[\frac{10}{7}\right] = 1$$

所以 $10! = (2^8)(3^4)(5^2)(7)$，

所以 10! 的正因子個數為 $(8+1)(4+1)(2+1)(1+1) = 270$。

(b)　10! 的正完全平方數因子必為 $(2^{2a})(3^{2b})(5^{2c})(7^{2d})$，

這樣，$0 \le a \le 4, 0 \le b \le 2, 0 \le c \le 1, d = 0$。

故正完全平方數因子個數為 $(4+1)(2+1)(1+1)(0+1) = 30$。

10.　(a)　若 $100!! = 2^a \times k$，其中 k 為奇數，求 a。

(b)　若 $99!! = 3^b \times k$，其中 k 不是 3 的倍數，求 b。

答：(a)　由於 $100!! = 2^{50} \times 50!$

$$a = 50 + \left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{50}{4}\right] + \left[\frac{50}{8}\right] + \left[\frac{50}{16}\right] + \left[\frac{50}{32}\right]$$

$$= 50+25+12+6+3+1 = 97$$。

(b)　由於 $99!! = \frac{100!}{100!!} = \frac{100!}{2^{50} \times 50!}$

$$b = \left[\frac{100}{3}\right] + \left[\frac{100}{9}\right] + \left[\frac{100}{27}\right] + \left[\frac{100}{81}\right] - \left[\frac{100}{6}\right] - \left[\frac{100}{18}\right] - \left[\frac{100}{54}\right]$$

$$= 33+11+3+1-16-5-1$$

$$= 26$$。

淺問

1. $[3.126]+\left[3.126+\frac{1}{8}\right]+\left[3.126+\frac{2}{8}\right]+\ldots+\left[3.126+\frac{7}{8}\right]=P$，求 P 的值。

   （HKMO 1999/2000 決賽團體）

2. 求不超過下列各式的最大整數值。

   （a） $(1+\sqrt{3})^6$　　（b） $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^8$

3. 求下列各式的值。

   （a） $\sum_{i=1}^{100}\left[\sqrt{i}\right]$　　（b） $\sum_{n=1}^{64}\left[\frac{89n}{64}\right]$

4 若 $\left[\sqrt[4]{1}\right]+\left[\sqrt[4]{2}\right]+\left[\sqrt[4]{3}\right]+\ldots+\left[\sqrt[4]{n}\right]=n+2$，求整數 n 。

   （HKMO 1990/91 初賽個人）

5. 若 $[5x]=3x+\frac{1}{2}$，求 x。（HKMO 1993/94 初賽團體）

6. 解方程 $\left[\frac{5+6x}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$ 。

7. 解方程 $x^2-8[x]+7=0$ 。（ALSUMO 1987）

8. 在數列 $\left[\frac{1^2}{2006}\right]$、$\left[\frac{2^2}{2006}\right]$、$\left[\frac{3^2}{2006}\right]$、...、$\left[\frac{2006^2}{2006}\right]$ 中，有多少個不同的整數？（HKPSC 2006）

9. 求下列各數中末位有多少個連續出現的零。

   (a) 60!　　(b) 130!　　(c) 300!

10. 若下列各數的素因子分解式為 $2^a\times 3^b\times 5^c\times\ldots$ 求 $a+b+c$ 的值。

   (a) 50!　　(b) 75!!　　(c) 100!!

詳答

1. $P = [3.126]+\left[3.126+\frac{1}{8}\right]+\left[3.126+\frac{2}{8}\right]+\ldots+\left[3.126+\frac{7}{8}\right]$

$= 3+3\times 6+4$

$= 25$

2. (a) $x=\sqrt{3}+1, y=\sqrt{3}-1$，

得 $\begin{cases} x+y=2\sqrt{3} \\ xy=2 \end{cases}$，

$x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy$

$= (2\sqrt{3})^2-2(2) = 8$。

$x^6+y^6 = (x^2+y^2)^3-3(xy)^2(x^2+y^2)$

$= (8)^3-3(2)^2(8) = 416$

由於 $0<\sqrt{3}-1<1$，故 $0<(\sqrt{3}-1)^6<1$，

所以所求的最大整數為 415。

(b) 設 $x=\sqrt{5}+\sqrt{2}, y=\sqrt{5}-\sqrt{2}$，

得 $\begin{cases} x+y=2\sqrt{5} \\ xy=3 \end{cases}$，

$x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy$

$= (2\sqrt{5})^2-2(3) = 14$。

$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$= (14)^2-2(3)^2 = 160$。

$x^8+y^8 = (x^4+y^4)^2-2x^4y^4$

$= (160)^2-2(3)^4 = 25438$。

由於 $0<\sqrt{5}-\sqrt{2}<1$，故 $0<(\sqrt{5}-\sqrt{2})^8<1$，

所以所求的最大整數為 25437。

3. (a) 當 $i=1\sim 2$ $\left[\frac{i}{3}\right]=0$ 總和 為 $0\times 2=0$；

當 $i=3\sim 5$ $\left[\frac{i}{3}\right]=1$ 總和 為 $3\times 1=3$；

當 $i=6\sim 8$ $\left[\frac{i}{3}\right]=2$ 總和 為 $3\times 2=6$；

如此類推：

上式為 $0+1\times 3+2\times 3+3\times 3+\ldots+32\times 3+33\times 2$

$= (1+2+3+\ldots+32)\times 3+66$

$= \frac{32\times 33}{2}+66 = 594$。

(b) $\sum_{n=1}^{64}\left[\frac{89n}{64}\right] = \sum_{n=1}^{64}\left[n+\frac{25n}{64}\right] = \sum_{n=1}^{64}\left[\frac{25n}{64}\right]+\sum_{n=1}^{64}n$

$\sum_{n=1}^{64}n = \frac{64\times 65}{2} = 2080$

考慮 $\frac{25n}{64}+\frac{25(64-n)}{64} = \frac{25\times 64}{64} = 25$

但由於分取高斯符號把小數部分刪去，但小數部分各部不大於 1，故刪去的小數部分總和為 1。

即 $\left[\frac{25n}{64}\right]+\left[\frac{25(64-n)}{64}\right] = 25-1 = 24$

所以 $\sum_{n=1}^{64}\left[\frac{25n}{64}\right] = \frac{64}{2}\times 25 = 800$

故所求總和為 $2080+800 = 2880$。

4. $\lfloor\sqrt[4]{1}\rfloor+\lfloor\sqrt[4]{2}\rfloor+\lfloor\sqrt[4]{3}\rfloor+\ldots+\lfloor\sqrt[4]{n}\rfloor=n+2$

考慮 當 n 介乎 1 至 $2^4=16$之間，$\lfloor\sqrt[4]{n}\rfloor=1$；

當 n 介乎 16 至 $3^4=81$之間，$\lfloor\sqrt[4]{n}\rfloor=2$ 。

故上式中的必有兩項的值為 2 ，故取 $n=17$ 。

5. $$3x+\frac{1}{2} \le 5x < 3x+\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \le 2x < \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{4} \le x < \frac{3}{4}$$

即 $$3(\frac{1}{4})+\frac{1}{2} \le 3x+\frac{1}{2} < 3(\frac{3}{4})+\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4} \le 3x+\frac{1}{2} < \frac{11}{4}$$

再由於 $3x+\frac{1}{2}$ 為整數，故 $3x+\frac{1}{2}=2$，即 $x=\frac{1}{2}$。

6. $$\frac{15x-7}{5} \le \frac{5+6x}{8} < \frac{15x-2}{5}$$

$$120x-56 \le 25+30x < 120x-16$$

$$-81 \le -90x < -41$$

$$\frac{9}{10} \ge x > \frac{41}{90}$$

即 $$3(\frac{9}{10})-\frac{7}{5} \ge \frac{15x-7}{5} > 3(\frac{41}{90})-\frac{7}{5}$$

$$\frac{13}{10} \ge \frac{15x-7}{5} > -\frac{1}{15}$$

再由於 $\frac{15x-7}{5}$ 為整數，故 $\frac{15x-7}{5}=0,1$，即 $x=\frac{7}{15},\frac{4}{5}$。

7. $x^2+7=8[x]$，設 $[x]=n$，

$$n^2+7 \le 8n < (n+1)^2+7$$

$$n^2+7 \le 8n < n^2+2n+8$$

得 $\begin{cases} n^2-8n+7 \le 0 \\ n^2-6n+8>0 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} (n-7)(n-1) \le 0 \\ (n-2)(n-4)>0 \end{cases}$， 即 $\begin{cases} 1 \le n \le 7 \\ n<2, n>4 \end{cases}$，

即 $1 \le n < 2$ 或 $4 < n \le 7$。

因為 n 為整數，故得 $n=1,5,6,7$，代入 $x^2=8n-7$，即 $x^2=1,33,41,49$。

即 $x=1,\sqrt{33},\sqrt{41},7$。

8. 設 $f(n)=\dfrac{n^2}{2006}$ ，

當 $n=2,3,4,\ldots,1003$ 時，

$$f(n)-f(n-1) = \frac{n^2}{2006}-\frac{(n-1)^2}{2006} = \frac{2n-1}{2006}<1$$

而 $[f(1)]=0$ ，$[f(1003)]=\left[\dfrac{1003^2}{2006}\right]=\left[\dfrac{1003}{2}\right]=501$ ，

所以，自 0 至 501 的整數都能取得到。

當 $n=1004,1005,1006,\ldots,2006$ 時，

$$f(n)-f(n-1) = \frac{n^2}{2006}-\frac{(n-1)^2}{2006} = \frac{2n-1}{2006}>1$$

而 $[f(1004)]=\left[\dfrac{1004^2}{2006}\right]=\left[\dfrac{(1003+1)^2}{2006}\right]=\left[501.5+1+\dfrac{1}{2006}\right]=502$ ，

$[f(2006)]=\left[\dfrac{2006^2}{2006}\right]=2006$ ，

所以，$\left[\dfrac{1004^2}{2006}\right]$ 、$\left[\dfrac{1005^2}{2006}\right]$ 、$\left[\dfrac{1006^2}{2006}\right]$ 、. . . 、$\left[\dfrac{2006^2}{2006}\right]$

個個取值為不同的 整數。

在 $\left[\dfrac{1^2}{2006}\right]$ 、$\left[\dfrac{2^2}{2006}\right]$ 、$\left[\dfrac{3^2}{2006}\right]$ 、. . . 、$\left[\dfrac{2006^2}{2006}\right]$ 中，

合共有 $502+1003=1505$ 個不同的整數。

9. (a) 零的個數 $=\left[\dfrac{60}{5}\right]+\left[\dfrac{60}{25}\right]=12+2=14$ 。

(b) 零的個數 $=\left[\dfrac{130}{5}\right]+\left[\dfrac{130}{25}\right]+\left[\dfrac{130}{125}\right]=26+5+1=32$ 。

(c) 零的個數 $=\left[\dfrac{300}{5}\right]+\left[\dfrac{300}{25}\right]+\left[\dfrac{300}{125}\right]=60+12+2=74$ 。

10. (a) a $= \left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{50}{4}\right]+\left[\frac{50}{8}\right]+\left[\frac{50}{16}\right]+\left[\frac{50}{32}\right]$

$= 25+12+6+3+1 = 47$，

b $= \left[\frac{50}{3}\right]+\left[\frac{50}{9}\right]+\left[\frac{50}{27}\right] = 16+5+1 = 22$，

c $= \left[\frac{50}{5}\right]+\left[\frac{50}{25}\right] = 10+2 = 12$。

故 $a+b+c=47+22+12=81$ 。

(b) a $= 0$，

b $= \left[\frac{76}{3}\right]+\left[\frac{76}{9}\right]+\left[\frac{76}{27}\right]-\left[\frac{76}{6}\right]-\left[\frac{76}{18}\right]-\left[\frac{76}{54}\right]$

$= 25+8+2-12-4-1 = 18$，

c $= \left[\frac{76}{5}\right]+\left[\frac{76}{25}\right]-\left[\frac{76}{10}\right]+\left[\frac{76}{50}\right]$

$= 15+3-7-1 = 10$。

故 $a+b+c=0+18+10=28$ 。

(c) a $= 50+\left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{50}{4}\right]+\left[\frac{50}{8}\right]+\left[\frac{50}{16}\right]+\left[\frac{50}{32}\right]$

$= 50+25+12+6+3+1 = 97$，

b $= \left[\frac{50}{3}\right]+\left[\frac{50}{9}\right]+\left[\frac{50}{27}\right] = 16+5+1 = 22$，

c $= \left[\frac{50}{5}\right]+\left[\frac{50}{25}\right] = 10+2 = 12$。

故 $a+b+c=97+22+12=133$ 。

數學，科學的女皇；數論，數學的女皇。

德國數學家
高斯
(Carl Friedrich Gauss 1777-1855)