「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

數論 – 整值與整根

摘要

1. 一次或二次方程的整根問題。
2. 二次方程的素數根問題。
3. 利用分解法尋找整式的素值問題。
4. 分式的整值問題。

拾例

1. 如果 $(x-2)(x-2Q)-1=0$ 有兩個整數根，求 Q 的值。
(HKMO 1999/2000 決賽個人)

答： 方程可改寫成 $x^2-(2+2Q)x+(4Q-1)=0$，

$$\begin{aligned}\Delta &= (2+2Q)^2-4(1)(4Q-1) = 4Q^2+8Q+4-16Q+4\\ &= 4Q^2-8Q+8 = 4(Q^2-2Q+1)+8-4\\ &= 4(Q-1)^2+4\end{aligned}$$

若令 Δ 為平方數，即 $Q-1=0$，得 $Q=1$。

2. 求所有正整數 x，使 x^2+x+20 可以表示成兩個連續正整數的乘積。

答： 設 正整數 x,k 滿足

$$\begin{aligned}x^2+x+20 &= k(k+1)\\ x^2+x+20-k(k+1) &= 0\end{aligned}$$

上式有正整數解，即

$$\begin{aligned}\Delta &= (1)^2-4(1)[20-k(k+1)] = 4k^2+4k+1-80\\ &= (2k+1)^2-80\end{aligned}$$

由於 Δ 為一平方數，故存有非負整數 m，令 $\Delta=m^2$。

即
$$\begin{aligned}(2k+1)^2-m^2 &= 80\\ (2k+1-m)(2k+1+m) &= 80\end{aligned}$$

由於 $(2k+1-m),(2k+1+m)$ 奇偶性相同，故

$$\begin{cases}2k+1+m=40\\ 2k+1-m=2\end{cases} \text{ 或 } \begin{cases}2k+1+m=20\\ 2k+1-m=4\end{cases} \text{ 或 } \begin{cases}2k+1+m=10\\ 2k+1-m=8\end{cases}$$

解得 $(k,m)=(10,19)$ 或 無整數解 或 $(4,1)$。

若 $m=19$，$x=\dfrac{-1+m}{2}=9$；若 $m=1$，$x=\dfrac{-1+1}{2}=0$（捨去）。

所以只有一解 $x=9$。

3.　整數 m 為何值時，方程 $mx^2-(m-2)x+(m-3)=0$ 的所有解均為整數？

答：　若 $m=0$，原方程化為 $2x-3=0$，解得 $x=\frac{3}{2}$ 不是整數。

若 $m\neq 0$，

$$\begin{aligned}
\Delta &= (m-2)^2-4(m)(m-3) &&> 0\\
&\quad m^2-4m+4-4m^2+12m &&> 0\\
&\quad 3m^2-8m-4 &&< 0
\end{aligned}$$

$$\frac{-(-8)-\sqrt{(-8)^2-4(3)(-4)}}{2(3)} < m < \frac{-(-8)+\sqrt{(-8)^2-4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$\frac{8-\sqrt{112}}{6} < m < \frac{8+\sqrt{112}}{6}$$

$$\frac{4-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{4+2\sqrt{7}}{3}$$

對於整數 m，只可取 1, 2 或 3。

若 $m=1$，原方程化成 $x^2+x-2=0$，解得 $x=1,-2$。

若 $m=2$，原方程化成 $2x^2-1=0$，解得 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$。

若 $m=3$，原方程化成 $3x^2-x=0$，解得 $x=0,\frac{1}{3}$。

故答案為 $m=1$。

4.　若 x,y 為正整數且 $x+y+xy=34$，求 $x+y$ 的值。

（創新杯 2004 中二複賽）

答：　不失一般性，令 $x\geq y$。

$$\begin{aligned}
x+y+xy+1 &= 35\\
(x+1)(y+1) &= 5\times 7
\end{aligned}$$

故得 $\begin{cases}x+1=7\\ y+1=5\end{cases}$，即 $\begin{cases}x=6\\ y=4\end{cases}$，所以 $x+y=6+4=10$。

5. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的兩個根為整數，且 $q>0$。若 $p+q=60$，求 q 的值。(HKMO 2011/12 初賽團體)

答： 設方程兩根為 a,b（$a\geq b$），由韋達定理可知

$\begin{cases} a+b=-p \\ ab=q \end{cases}$，即 $ab-a-b = 60$

$$ab-a-b+1 = 61$$
$$(a-1)(b-1) = 61$$

因為 61 為素數，所以有

$\begin{cases} a-1=61 \\ b-1=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-1=-1 \\ b-1=-61 \end{cases}$

即解得 $\begin{cases} a=62 \\ b=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=0 \\ b=-60 \end{cases}$（捨去）

故 $q=ab=62\times 2=124$。

6. 若方程 $(k^2-1)x^2+6(3k-1)+72=0$ 的兩根均為正整數，求整數 k 的 值。

答： 設兩根為 a,b，

由韋達公式可知 $ab=\dfrac{72}{k^2-1}$ 為正整數，

故得 k 可能為 $\pm 2,\pm 3,\pm 5$。

另 $a+b=-\dfrac{6(3k-1)}{k^2-1}$，亦為正整數。

把所得 k 的可能解代入一一測試，顯然 k 只可取負值，

$k=-2$， $a+b=-\dfrac{6[3(-2)-1]}{(-2)^2-1}=\dfrac{42}{3}=14$，

$k=-3$， $a+b=-\dfrac{6[3(-3)-1]}{(-3)^2-1}=\dfrac{60}{8}=\dfrac{15}{2}$，

$k=-5$， $a+b=-\dfrac{6[3(-5)-1]}{(-5)^2-1}=\dfrac{96}{24}=4$，

故解得 $k=-2,-5$。

(註： 若 $k=-2$，即 $x^2-14x+24=0$，解得 $x=4,10$；

若 $k=-5$，即 $x^2-4x+3=0$，解得 $x=1,3$。)

7. 若素數 a、b 為二次方程 $x^2-21x+t=0$ 的根，求 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ 的值。

(希望杯 1991)(HKMO 1995/96 初賽團體)

答： 若 $a+b=21$，即必有一素數為 2，不妨假設 $a=2$，則 $b=19$。

故 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{19}+\dfrac{19}{2} = \dfrac{365}{38}$。

8.　對於每個正整數 n，設 $f(n)=n^4-360n^2+400$。求所有為素數的 $f(n)$ 的值的總和。（AMC 12 2009）

答：
$$f(n) = n^4+40n^2+400-400n^2 = (n^2+20)^2-400n^2$$
$$= (n^2-20n+20)(n^2+20n+20)$$

對於正整數 n，$n^2-20n+20<n^2+20n+20$。

若 $f(n)$ 為素數，即 $n^2-20n+20 = 1$

$n^2-20n+19 = 0$

$n=1$ 或 $n=19$。

$f(1)=(1)[(1)^2+20(1)+20]=41$，$f(19)=(1)[(19)^2+20(19)+20]=761$。

由於 41 和 761 均為素數，所以總和為 $41+761=802$。

9.　問方程 $(x+y+999)^2=x^2+y^2+999^2$ 有多少組整數解。

答：
$$(x+y+999)^2-x^2-y^2-999^2 = 0$$
$$2(999x+999y+xy) = 0$$
$$xy+999x+999y+999^2 = 999^2$$
$$(x+999)(y+999) = 999^2$$

因為 $999=3^3\times37$，所以 $999^2=3^6\times37^2$。

所以 999^2 有 $(6+1)(3+1)=21$ 個因子，連同正負值，共有 42 組整數解。

10.　若有 c 個正整數 n 使 $\dfrac{n+17}{n-7}$ 也是正整數，求 c 的值。
（HKMO 2006/07 決賽團體）

答：
$$\frac{n+17}{n-7} = 1+\frac{24}{n-7}$$

而 24 的因子有　1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24，

即 n = 8, 9, 10, 11, 13, 15, 19, 31，即 c = 8。

淺問

1. 若 P, Q 為正整數使 $P+Q+PQ=90$，且 $D=P+Q$，求 D。
(HKMO 1986/87 決賽團體)

2. 一個長方形各邊的長度都是整數，而其面積是 2010。那麼它的周界的最小可能值是多少？(培正 2010 初賽中四)

3. 一個長方體各邊的長度都是整數，而其體積是 2010。那麼它的總表面積的最小可能值是多少？

4. 三個正整數的乘積 N 為它們的和的 6 倍。若其中一個整數為另外兩個之和，求 N 的所有可能值之和。(AIME 2003)

5. 若 a,b,c 是正整數且 $abc+ab+bc+ca+a+b+c=8000$，求 abc 的最大值。

6. 若 $(1000-a)(1000-b)(1000-c)(1000-d)(1000-e)=24^2$，其中 a,b,c,d 及 e 為偶數，且 $a>b>c>d>e$，求 a,b,c,d 及 e 的值。
(HKMO 2010/11 初賽團體)

7. 有多少對有序正整數對 (M,N) 使 $\dfrac{M}{6}=\dfrac{6}{N}$？(AMC 10 2012)

8. 求所有使分式 $\dfrac{2x^2-9x-32}{x-7}$ 的值為整數的整數 x 的總和。

9. 若方程 $x^2-px+p+2002=0$ 的根為非零整數，求 p 的值。
(培正 2003 初賽中四)

10. 求 m 的最大值，使二次方程 $x^2+(m+1)x+(2m+1)=0$ 有兩整根。

11. 已知關於 x 的方程 $(4-k)(8-k)x^2-(80-12k)x+32=0$ 的根為整數，求 k 的所有可能值之和。

12. 已知 n 為一正整數，且 n^4-18n^2+49 為一素數，求 n 的值。
(HKMO 2010/11 初賽團體)

詳答

1. $1+P+Q+PQ = 91$
$(1+P)(1+Q) = 91$
因為 $91=7\times13$，所以 $\begin{cases}P+1=7\\Q+1=13\end{cases}$ 或 $\begin{cases}P+1=13\\Q+1=7\end{cases}$，
即 $\begin{cases}P=6\\Q=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}P=12\\Q=6\end{cases}$。故 $D=P+Q=6+12=18$。

2. 設長方形的長、闊分別為 x,y（$x<y$）。
$xy = 2010 = 2\times3\times5\times67$
即 (x,y) = (1, 2010)、(2, 1005)、(3, 670)、(5, 402)、(6, 335)、(10, 201)、(15, 134) 及 (30, 67)
當中周界的最小值為 $2(30+67)=194$。

3. 設長方形的長、闊分別為 x,y,z $(x\le y\le z)$。
$xyz = 2010 = 2\times3\times5\times67$
即 (x,y,z) = (1, 1, 2010)、(1, 2, 1005)、(1, 3, 670)、(1, 5, 402)、(1, 6, 335)、(1, 10, 201)、(1, 15, 134)、(1, 30, 67)、(2, 3, 335)、(2, 5, 201)、(2, 15, 67)、(3, 5, 134)、(3, 10, 67)、(5, 6, 67)
當中總表面積的最小值為 $2(5\times6+6\times67+67\times5)=1534$。

4. 設三個正整數為 a,b,c。不失一般性，令 $a\le b<c$，即 $c=a+b$。
N = abc = $6(a+b+c)$
= $ab(a+b)$ = $12(a+b)$
即 ab = 12
故 (a,b) = (1, 12)、(2, 6) 及 (3, 4)
對應 c = 13、8 及 7
故 N 的所有可能值之和 = $12\times13+12\times8+12\times7$ = 336。

5. 由於不失一般性，令 $a \le b \le c$，

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 = 8001$$
$$(a+1)(b+1)(c+1) = 8001$$

再由於 $8001 = 3^2 \times 7 \times 127$，所以得

$\begin{cases} a+1=3 \\ b+1=3 \\ c+1=889 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+1=3 \\ b+1=21 \\ c+1=127 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a+1=7 \\ b+1=9 \\ c+1=127 \end{cases}$

$\begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=888 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} c=2 \\ b=20 \\ c=126 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=6 \\ b=8 \\ c=126 \end{cases}$

即 $abc = 3552$ 或 $abc = 5040$ 或 $abc = 6048$

所以 abc 的最大值為 6048。

6. 若把 24 寫成兩偶數乘積為 $24 = 2\times12 = 4\times6$，

故 24 可分解成 4 個不同的正偶數的乘積，但不能為 5。

是故 5 個偶數必有負數，即

$24^2 = (-6)\times(-2)\times2\times4\times6$，

即 $a = 1000-(-6) = 1006$、$b = 1000-(-2) = 1002$、$c = 1000-2 = 998$

$d = 1000-4 = 996$ 及 $e = 1000-6 = 994$。

7. $MN = 36 = 1\times36 = 2\times18 = 3\times12$
$= 4\times9 = 6\times6$

故 (M, N) = (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (6, 6),
(9, 4), (12, 3), (18, 2), (36, 1)

合共有 9 組。

8. $$\frac{2x^2-9x-32}{x-7} = \frac{(2x+5)(x-7)+3}{x-7} = 2x+5+\frac{3}{x-7}$$。

由於分式得整數值，$x-7$ 為 3 的因子，

即 $x-7 = \pm1, \pm3$，$x = 8, 6, 10, 4$。故總和為 $10+8+6+4 = 28$。

9. 設 m 和 n 為方程的兩根，其中 $m \geq n$，

由韋達定理，則 $mn = p + 2002$ 及 $m + n = p$。

$$mn = m + n + 2002$$
$$mn - m - n = 2002$$
$$mn - m - n + 1 = 2003$$
$$(m-1)(n-1) = 2003$$

由於 2003 為一素數，故得

$m - 1 = 2003$ 及 $n - 1 = 1$ 或 $m - 1 = -2003$ 及 $n - 1 = -1$

由於右式解得 $n = 0$，故唯一解即 $m = 2004$ 及 $n = 2$，

因此 $p = m + n = 2004 + 2 = 2006$。

10. $x^2 + (m+1)x + (2m+1) = 0$

$$x = \frac{-(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 4(1)(2m+1)}}{2(1)}$$
$$= \frac{-m-1 \pm \sqrt{m^2 + 2m + 1 - 8m - 4}}{2}$$
$$= \frac{-m-1 \pm \sqrt{m^2 - 6m - 3}}{2}$$
$$= \frac{-m-1 \pm \sqrt{(m-3)^2 - 12}}{2}$$

要使上式得整數值，先得令

$\Delta = (m-3)^2 - 12$ 為平方數，且 $-(m+1) \pm \sqrt{\Delta}$ 為偶數。

即 $\Delta = k^2$，

$$12 = (m-3)^2 - k^2 = (m-3-k)(m-3+k)$$

故得 $m - 3 - k = 2$ 且 $m - 3 + k = 6$，得 $m = 7, k = 2$

代入得 $x = \frac{-7-1 \pm 2}{2} = -5$ 或 -3，故解為 $m = 7$。

11. 若 $k=4$，原式化簡為 $32k-32=0$，解得 $k=1$，合題意。
若 $k=8$，原式化簡為 $16k+32=0$，解得 $k=-2$，合題意。
若 $k\neq 4,8$，原式化成

$$[(4-k)x-8][(8-k)x-4]=0$$

解得兩根為 $\dfrac{8}{4-k}$ 及 $\dfrac{4}{8-k}$。
因此 k 得使 $4-k$ 為 8 的因子，即 $4-k=\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$，
得 $k=3,5,2,6,0,-4,12$。（捨去 $k=8$）
因此 k 得使 $8-k$ 為 4 的因子，即 $4-k=\pm1,\pm2,\pm4$，
得 $k=7,9,6,10,12$。（捨去 $k=4$）
綜合得 $k=6,12$。
故所求總和為 $4+6+8+12=30$。

12. $n^4-18n^2+49 = n^4-14n^2+49-4n^2 = (n^2-7)^2-4n^2$
$= (n^2+2n-7)(n^2-2n-7)$
由於 n^4-18n^2+49 為一素數且 $n^2+2n-7>n^2-2n-7$，
所以 $n^2-2n-7=1$，即 $n^2-2n-8=0$，$n=4$ 或 -2(捨去)
故 $n=4$，驗算，$n^2+2n-7=16+8-7=17$ 為一素數。

整數是一切數學的源頭。

德國數學家
閔可夫斯基
(Herman Minkowski 1864-1909)