「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

數論 － 線性不定方程

摘要

1. 淺介不定方程定義。
2. 解二元一次不定方程 $ax+by=m$：
   以試值法、同餘法或輾轉相除法尋初解 (x_0, y_0)。
   (i)　若 $(a,b)=1$，$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 - at \end{cases}$，其中 $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
   (ii)　若 $(a,b)\neq 1$，但整除 m，兩邊除以 (a,b) 再進行計算。
   (iii)　若 $(a,b)\neq 1$，但不整除 m，無解。
3. 解三元一次不定方程
   分拆為兩道二元一次不定方程。
4. 解二道三元一次不定方程組
   以消元法，消去一未知數，再進行計算。

拾例

1. 求方程 $5x+6y=7$ 的所有整數解。

答： 觀察得初解 $x=-1, y=2$，

所以得解 $x=-1+6t, y=2-5t$，其中 t 為任何整數。

2. 求方程 $37x+107y=25$ 的所有整數解。

答： 解法 1：

利用輾轉相除法，得 $107=2\times37+33$ $37=1\times33+4$

$33=8\times4+1$。

反過來

$$
\begin{aligned}
1 &= 33-8\times4 = 37-4-8\times4 \\
&= 37-9\times4 = 37-9\times(37-33) \\
&= 9\times33-8\times37 \\
&= 9\times(107-2\times37)-8\times37 \\
&= 9\times107-26\times37
\end{aligned}
$$

所以對於 $37x+107y=1$ 存有初解 $\begin{cases} x=-26 \\ y=9 \end{cases}$。

即對原方程存有初解 $\begin{cases} x=-26\times25=-650 \\ y=9\times25=225 \end{cases}$，

故所有整數解為 $\begin{cases} x=-650+107t \\ y=225-37t \end{cases}$，其中 t 為任何整數。

解法 2：

取模 37，得 $33y=25$，即 $-4y=-12$，$y=3$。

代入原式

$$
\begin{aligned}
37x+107\times3 &= 25 \\
37x &= -296 \\
x &= -8
\end{aligned}
$$

故所有整數解為 $\begin{cases} x=-8+107t \\ y=3-37t \end{cases}$，其中 t 為任何整數。

3. 求方程 $12x+16y-28=0$ 的所有整數解。

答： 原方程可改寫為 $3x+4y-7=0$

觀測得初解 $x=1, y=1$。

所以得解 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1-3t \end{cases}$，其中 $t=0,\pm1,\pm2\ldots$。

4. (a) 問有多少對正整數序偶 (m,n) 滿足 $19m+95n=1995$。

(b) 在所有正整數序偶 (m,n) 中，求 mn 的最大值。

答： (a) 原式化簡 $m+5n=105$，

觀看得初解 $m=100, n=1$。

故得解 $\begin{cases} m=100-5t \\ n=1+t \end{cases}$，其中 $0\le t\le 19$。

故共有 20 組正整數序偶。

(b)
$$\begin{aligned} mn &= (100-5t)(1+t) = -5t^2+95t+100 \\ &= -5(t^2-19t)+100 \\ &= -5(t^2-19t+\frac{381}{4})+100+\frac{1905}{4} \\ &= -5(t-\frac{19}{2})^2+\frac{2305}{4} \end{aligned}$$

由於 t 為整數，且 $9<\frac{19}{2}<10$。

故試 $t=9$， $mn=(100-5\times 9)(1+9)=550$。

再試 $t=10$， $mn=(100-5\times 10)(1+10)=550$。

所以 mn 的最大值為 550。

5. *小明的計算機只能提供兩種運算：使顯示的數字加上 12 或減去 7 。今天計算機上顯示的數字是 2010。至少需要多少步運算才可使顯示的數字變為 2012？(HKMHASC 2011/12)

答： 設需要 x 步加 12 運算和 y 步減 7 運算。

即得 $12x-7y=2012-2010=2$。

兩邊取模七，得 $5x\equiv 2 \pmod 7$，解得 $x\equiv 6 \pmod 7$。

取最小解 $x=6$，得 $12(6)-7y = 2$

$y = 10$

即最小要經過 6 步加 12 運算和 10 步減 7 運算，才可達至上述結果。

故共需 $6+10=16$ 步。

6. 若 x, y 滿足 $6x+4y=64$ ，求 $|x-y|$ 的最小值。

答： 即解 $3x+2y=32$。

觀測得初解 $x=10, y=1$。

故不定方程解為 $x=10-2t, y=1+3t$，其中 t 為任意整數。

即 $|x-y| = |(10-2t)-(1+3t)| = |9-5t|$。

取 $t=2$，得 $|x-y|=1$ 為最小值。

7. 求方程 $3x+5y-7z=15$ 的整數解。

答： 令 $3x+5y=t$ ，得初解 $x=2t, y=-t$ ，

故得解 $x=2t-5u, y=-t+3u$ ，其中 u 為任何整數。

再解 $t-7z=15$，觀察得初解 $t=1, z=-2$ ，

所以得解 $t=1+7v, z=-2+v$，其中 v 為任何整數。

綜合得 $\begin{cases} x=2-5u+14v \\ y=-1+3u-7v \\ z=-2+v \end{cases}$ ，其中 u, v 為任何整數。

8. 今有雞翁一直錢五，雞母一直錢三，雞雛三直錢一，凡百錢雞百隻，問雞翁母雛各幾何？（張丘建算經）

答： 設雞翁母雛各 x,y,z 隻，則

$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\dfrac{z}{3}=100 \end{cases}$，消去 z，得 $14x+8y=200$，即 $7x+4y=100$ 。

觀察得初解 $x=0, z=25$ ，即 $x=4t, y=25-7t$ ，

由此 $z=100-4t-(25-7t)=75+3t$ ，

由於所求的為非負整數解，故 $\begin{cases} 4t\ge 0 \\ 25-7t\ge 0 \end{cases}$，即 $t=0,1,2,3$ 。

故有解 $\begin{cases} x=0 \\ y=25, \\ z=75 \end{cases}\begin{cases} x=4 \\ y=18, \\ z=78 \end{cases}\begin{cases} x=8 \\ y=11, \\ z=81 \end{cases}\begin{cases} x=12 \\ y=4 \\ z=84 \end{cases}$ 。

9. 某季足球比賽，勝一場得 3 分，和一場得 1 分，負一場得 0 分。某隊比賽了二十場，得 28 分，問最少有多少場勝利？

答： 設某隊勝 x 場、和 y 場、負 z 場。

$\begin{cases} 3x+y=28 \\ x+y+z=20 \end{cases}$，消去 y 後得 $2x-z=8$ 。

觀察得初解 $x=4, z=0$，故得解 $\begin{cases} x=4+k \\ z=2k \end{cases}$ ，

待入得 $y=20-(4+k)-(2k)=16-3k$ ，

綜合得 $\begin{cases} x=4+k \\ y=16-3k \\ z=2k \end{cases}$，其中 k = 0, 1, 2, 3, 4, 5。

若取 $k=0$ ，便得最少的 4 場勝利。

10. 用一元、二元及五元硬幣，以湊合十七元，且每次均須使用各種硬幣，其方法有 n 種，求 n 。(HKMO 1994/95 初賽團體)

答： 設分別有一元、二元及五元硬幣 x 枚、 y 枚、 z 枚。

$x+2y+5z=17$，其中 $x,y,z>0$

先設 $x+2y=t$，觀看得初解 $x=-t, y=t$。

故得解 $\begin{cases} x=-t+2u \\ y=t-u \end{cases}$，其中 u 為任何整數。

再看 $t+5z=17$，觀看得初解 $t=2, z=3$。

故得解 $\begin{cases} t=2+5v \\ z=3-v \end{cases}$，其中 v 為任何整數。

綜合得 $\begin{cases} x=-2+2u-5v \\ y=2-u+5v \\ z=3-v \end{cases}$，其中 u, v 為任何整數。

但由於 $x,y,z>0$，故得 $\begin{cases} -2+2u-5v\geq 1 \\ 2-u+5v\geq 1 \\ 3-v\geq 1 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 2u-5v\geq 3 \\ -u+5v\geq -1 \\ v\leq 2 \end{cases}$

解得 $v=1,2$。

若 $v=1$， $x=-7+2u, y=7-u, z=2$，即只可取 $u=4,5,6$，

這時 $(x,y,z)=(1,3,2),(3,2,2),(5,1,2)$，共有三解。

若 $v=2$， $x=-12+2u, y=12-u, z=1$，即只可取 $u=7,8,9,10,11$，

這時 $(x,y,z)=(2,5,1),(4,4,1),(6,3,1),(8,2,1),(10,1,1)$，共有五解。

故 $n=3+5=8$。

淺問

1. 求下列不定方程的所有整數解：

   (a) $6x-5y=11$ (b) $8x-4y=13$

   (c) $3x+9y=24$ (d) $-3x+2y=10$

2. 求有序正整數對 (m,n) 的數目使方程 $20m+12n=2012$ 成立。（AIME 2012）

3. 求不定方程 $123x+456y=7890$ 的所有整數解。

4. 若 $2x+3y=100$，其中 x,y 都是正整數，求 xy 的最大值。

5. x, y 為正整數，且 $3x+5y=123$。求 $|x-y|$ 的最小值。
   （HKMO 1994/95 初賽個人）

6. 問有多少對正整數序偶 (x,y) 使 $2x+7y=1000$？（FWMT-J 2001）

7. 某國硬幣 \$5 和 \$7 兩種，須支付 \$142 共有多少種不同方法？

8. 若把著名數學家哈代辭世的那一天的月份數乘以 31 加上日期數乘以 13 的總和便是 385。問哈代在哪一天辭世？

9. 求下列不定方程的所有整數解：

   (a) $x-2y-3z=7$ (b) $3x+6y-30z=4$

   (c) $15x+10y+6z=61$ (d) $3x-5y+7z=11$

10. 有 \$1、\$2 和 \$5 硬幣若干枚，它們共值 30 元，求不同的組合方法數目。

11. 解下列不定方程組：

    (a) $\begin{cases} x+y+z=99 \\ x+6y+21z=100 \end{cases}$。 (b) $\begin{cases} x+y+z=94 \\ x+8y+50z=87 \end{cases}$

12. 張先生到市場買雞。已知公雞、母雞和小雞的售價分別是 24 元、16 元和 1 元。他用了 400 元買了 100 隻雞。他買了多少隻母雞？（培正 2002 高級）

13. 今有碗一值二十文，盤一值一文，土器五值一文，各買幾何，錢百文買百器？（日 柴村藤左衛門「格致算書」）

詳答

1. (a) $6x-5y=11$

直觀得初解 $x=1, y=-1$，而 $(6,5)=1$。

所以得解 $x=1-5t, y=-1-6t$，其中 $t=0,\pm1,\pm2...$

(b) $8x-4y=13$

由於 $(8,4)=4$，而右方不是 4 的倍數，故無解。

(c) $3x+9y=24$

原式可化簡為 $x+3y=8$。

直觀得初解 $x=2, y=2$，而 $(1,3)=1$。

所以得解 $x=2-3t, y=2+t$，其中 $t=0,\pm1,\pm2...$

(d) $-3x+2y=10$

直觀得初解 $x=-2, y=2$，而 $(3,2)=1$。

所以得解 $x=-2+2t, y=2+3t$，其中 $t=0,\pm1,\pm2...$

2. $$\begin{aligned} 20m+12n &= 2012 \\ 5m+3n &= 503 \end{aligned}$$

觀測得初解 $m=100, n=1$。

故得 $\begin{cases} m=100-3t \\ n=3+5t \end{cases}$，

其中 t 為整數且符合 $\begin{cases} 100-3t>0 \\ 3+5t>0 \end{cases}$，即 $-\frac{3}{5}<t<\frac{100}{3}$

即 $0\le t\le 33$。即共有解 34 個。

3. $123x+456y=7890$，即 $41x+152y=2630$。

兩方取模 41，得 $29y\equiv 6 \pmod{41}$，即 $-12y\equiv 252 \pmod{41}$，得 $y=-21$。

進而得 $123x+456(-21)=7890$， $x=142$。

所以 $\begin{cases} x=142-152t \\ y=-21+41t \end{cases}$，其中 $t=0,\pm1,\pm2...$

4. $2x+3y=100$，得解 $\begin{cases} x=50-3t \\ y=0+2t \end{cases}$，其中 $t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

再令 $\begin{cases} x=50-3t>0 \\ y=0+2t>0 \end{cases}$，解得 $1\le t\le 16$。

$xy=50-3t(2t)=-6t^2+100t=-6(t^2-\frac{50}{3}t+\frac{625}{9})+6\times\frac{625}{9}$

$= \quad -6(t-\frac{25}{3})^2+\frac{1300}{3}$，故取 $t=8,9$。

若取 $t=8$，$xy=26\times16=416$，

若取 $t=9$，$xy=23\times18=414$，故最大值為 416。

5. 觀察得初解 $x=1,y=24$，所以得解 $x=1+5t,y=24-3t$，其中 $t=0,1,2\ldots7$。

而 $|x-y| \quad = \quad |(1+5t)-(24-3t)| \quad = \quad |8t-23|$

取最小值，得 $t=3$，$|x-y|=1$。

6. 觀察得初解 $x=500,y=0$，

故不定方程解為 $x=500-7t,y=2t$，其中 $1\le t\le 71$。

合共有序偶 71 個。

7. 設硬幣 \$5 和 \$7 各有 x 枚和 y 枚。

則 $5x+7y=142$，觀察得初解 $x=20,y=6$。

故得解 $x=20+7t,y=6-5t$。

由於我們要求非負整數解，故得 $\begin{cases} 20+7t\ge0 \\ 6-5t\ge0 \end{cases}$，

故得 $-\frac{20}{7}\le t\le\frac{6}{5}$，即 $-2\le t\le1$，故共有四種方法。

即 $\begin{cases} x=6 \\ y=16 \end{cases}, \begin{cases} x=13 \\ y=11 \end{cases}, \begin{cases} x=20 \\ y=6 \end{cases}, \begin{cases} x=27 \\ y=1 \end{cases}$。

8. 設哈代辭世的日子為 x 月 y 日，

則 $31x+13y = 385$

$5x = 8 \pmod{13}$

$x = 12 \pmod{13}$

得 $31\times12+13y = 385$

$13y = 13$

$y = 1$

故哈代在 12 月 1 日辭世。

9.　(a)　把不定方程改寫成 $\begin{cases} w-3z=7 \\ x-2y=w \end{cases}$。

而 $x-2y=w$，得解 $\begin{cases} x=-w+2s \\ y=-w+s \end{cases}$，其中 $s=0,\pm1,\pm2,\ldots$

而 $w-3z=7$，

解得 $\begin{cases} w=1-3t \\ z=-2-t \end{cases}$，其中 $t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

所以綜合解得 $\begin{cases} x=-1+3t+2s \\ y=-1+3t+s \\ z=-2-t \end{cases}$，其中 $s,t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

(b)　由於（3, 6, 30）= 3，而右方不是 3 的倍數，故無解。

(c)　把不定方程改寫成 $\begin{cases} 5w+6z=61 \\ 15x+10y=5w \end{cases}$

而 $15x+10y=5w$，即 $3x+2y=w$

解得 $\begin{cases} x=w+2s \\ y=-w-3s \end{cases}$，其中 $s=0,\pm1,\pm2,\ldots$

而 $5w+6z=61$，

解得 $\begin{cases} w=5+6t \\ z=6-5t \end{cases}$，其中 $t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

所以綜合解得 $\begin{cases} x=5+6t+2s \\ y=-5-6t-3s \\ z=6-5t \end{cases}$，其中 $s,t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

(d)　把不定方程改寫成 $\begin{cases} w+7z=11 \\ 3x-5y=w \end{cases}$

而 $3x-5y=w$，得解 $\begin{cases} x=2w+5s \\ y=w+3s \end{cases}$，其中 $s=0,\pm1,\pm2,\ldots$

而 $w+7z=11$，得解 $\begin{cases} w=4+7t \\ z=1-t \end{cases}$，其中 $t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

綜合解得 $\begin{cases} x=8+14t+5s \\ y=4+7t+3s \\ z=1-t \end{cases}$，其中 $s,t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

10. 設有 \$1、 \$2 和 \$5 硬幣分別有 x 枚、 y 枚和 z 枚。

依題意，有 $x+2y+5z=30$

即解 $\begin{cases} w+5z=30 \\ x+2y=w \end{cases}$，

在 $x+2y=w$，解得 $\begin{cases} x=-w+2s \\ y=w-s \end{cases}$，其中 $s=0,\pm1,\pm2,\ldots$

在 $w+5z=30$，解得 $\begin{cases} w=0+5t \\ z=6-t \end{cases}$，其中 $t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

綜合得解 $\begin{cases} x=-5t+2s \\ y=5t-s \\ z=6-t \end{cases}$，

要令 $x,y,z\geq 0$，故得 $0\leq t\leq 6, 2.5t\leq s\leq 5t$。

當 $t=0, s=0$； 當 $t=1, s=3,4,5$；

當 $t=2, s=5,6,7,\ldots,10$； 當 $t=3, s=8,9,10,\ldots,15$；

當 $t=4, s=10,11,12,\ldots,20$； 當 $t=5, s=13,14,15,\ldots,25$；

當 $t=6, s=15,16,17,\ldots,30$。

所以共有 $1+3+6+8+11+13+16$ = 58 個組合方法。

11. (a) $\begin{cases} x+y+z=99 \\ x+6y+21z=100 \end{cases}$

把兩式相減，得 $5y+20z=1$，由於 $(5,20)=5$，而 1 不是 5 的倍數，故無解。

(b) $\begin{cases} x+y+z=94 \\ x+8y+50z=87 \end{cases}$

把兩式相減，得 $7y+49z=-7$，即 $y+7z=-1$。

解得 $\begin{cases} y=-1+7t \\ z=0-t \end{cases}$，其中 $t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

代入，得 $x=94-y-z=94-(-1+7t)-(-t)=95-6t$

所以得解 $\begin{cases} x=95-6t \\ y=-1+7t \\ z=-t \end{cases}$，其中 $t=0,\pm1,\pm2,\ldots$

12. 設張先生買了公雞、母雞、小雞分別為 x 隻、 y 隻和 z 隻。

$\begin{cases} 24x+16y+z=400 \\ x+y+z=100 \end{cases}$，兩式相減，得 $23x+15y=300$ 。

觀察得初解 $\begin{cases} x=0 \\ y=20 \end{cases}$，這亦是唯一解，這時 $z=80$ 。

故張先生買了母雞 20 隻。

13. 設碗、盤、土器各有 x, y, z 個，

則 $\begin{cases} x+y+z=100 \\ 20x+y+\frac{z}{5}=100 \end{cases}$，

兩式相減，得 $19x-\frac{4z}{5}=0$ ，即 $95x-4z=0$ 。

故得初解 $x=z=0$ ，即 $x=4t, z=95t$ ，得 $y=100-99t$ 。

由於我們要求非負整數解，

故得 $t=0,1$ ，即 $(x, y, z) = (0,100,0), (4,1,85)$ 。

數學是年輕人的遊戲。

英國數學家

哈代

(Godfrey Harold Hardy 1877-1947)