「噢！數？」拾例集　周浩然輯

數論 – 連分數與分數分析

摘要

1. 有限位連分數及循環連分數的化簡。
2. 利用循環連分數近似二次無理根。
   (a) $\sqrt{n^2+1} = [n,\overline{2n}]$
   (b) $\sqrt{n^2-1} = [(n-1),\overline{1,2(n-1)}]$
3. 利用連分數解不定方程。
   (a) 解二元一次不定方程。
   (b) 解佩爾（Pell）方程：
   如 $x^2-ay^2=\pm1$（其中 a 不含平方因子的整數）。
   把 $\sqrt{a}$ 用連分數展開。
   設 $\frac{p_k}{q_k}$ 為第 k 個漸近分數。
   (i) $x^2-ay^2=1$，
   若循環節 m 為偶數則有 $x=p_{mn-1}, y=q_{mn-1}$。
   （其中 $n=1,2,3,\ldots$）
   (ii) $x^2-ay^2=1$，
   若循環節 m 為奇數則有 $x=p_{mn-1}, y=q_{mn-1}$。
   （其中 $n=2,4,6,\ldots$）
   (iii) $x^2-ay^2=-1$，
   若循環節 m 為奇數則有 $x=p_{mn-1}, y=q_{mn-1}$。
   （其中 $n=1,3,5,\ldots$）
4. 單位分數分拆。
   (a) 以不定方程計算二元或三元單位分數分拆。
   (b) 介紹貪婪法單位分數分拆。

拾例

1. 把 $\frac{31}{7}$ 化成連分數。

答： $\frac{31}{7} = 4+\frac{3}{7} = 4+\frac{1}{7/3} = 4+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$ 。

2. 求 $2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\ldots}}}$ 的值。

答： 設 $x = 2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\ldots}}}$ ，

即 $x = 2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{x}} = 2+\frac{1}{(5x+1)/x}$

$= 2+\frac{x}{5x+1} = \frac{2(5x+1)+x}{5x+1}$

$= \frac{11x+2}{5x+1}$

$5x^2+x = 11x+2$

即 $5x^2-10x-2=0$

所以 $x = \frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(5)(-2)}}{2(5)} = \frac{10\pm\sqrt{140}}{10}$ 。

但由於 $x>2$ ，故 $x = \frac{10+\sqrt{140}}{10}$ 。

3.　化 $\sqrt{2}$ 為循環連分數

答：

$$\sqrt{2} = 1+(\sqrt{2}-1) = 1+\frac{2-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$$

$$= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\dots}}$$

所以 $\sqrt{2}=[1,\overline{2}]$ 。

4. 化 $\sqrt{98}$ 為循環連分數。

答：
$$\begin{aligned}
\sqrt{98} &= 9+(\sqrt{98}-9) &&= 9+\frac{98-81}{\sqrt{98}+9}\\
&= 9+\cfrac{1}{(\sqrt{98}+9)/17} &&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{98}-8}{17}}\\
&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{98-64}{17(\sqrt{98}+8)}} &&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{\sqrt{98}+8}}\\
&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(\sqrt{98}+8)/2}} &&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{\sqrt{98}-8}{2}}}\\
&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{98-64}{2(\sqrt{98}+8)}}} &&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{17}{\sqrt{98}+8}}}\\
&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{(\sqrt{98}+8)/17}}} &&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{\sqrt{98}-9}{17}}}}\\
&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{98}+9}}}} &&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{18+(\sqrt{98}-9)}}}}\\
&= 9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{18+\dots}}}}
\end{aligned}$$

所以 $\sqrt{98}=[9,\overline{1,8,1,18}]$。

5. 化 $\left[2,\overline{3,4}\right]$ 為根值。

答： 設 $x=\left[\overline{3,4}\right]$，

則 $x = \dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4+x}} = \dfrac{4+x}{13+3x}$

$x(13+3x) = 4+x$

$3x^2+12x-4 = 0$

$x = \dfrac{-12\pm\sqrt{144+48}}{6} = \dfrac{-12\pm\sqrt{192}}{6}$

由於 x 為正值，故得 $x=\dfrac{-6+4\sqrt{3}}{3}$。

原式 $= x+2 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$。

6. 求不定方程 $73x-43y=1$ 的正整數解。

答： 由於 $\dfrac{73}{43}=[1,1,2,3,4]$，

考慮 $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}} = 1+\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{7}} = 1+\dfrac{7}{10} = \dfrac{17}{10}$。

故得初解 $x=(-1)^{4-1}\times 10=-10$，$y=(-1)^{4-1}\times 17=-17$。

故解為 $x=-10+43t$，$y=-17+73t$，其中 $n=1,2,3,\ldots$

7. 求不定方程 $x^2-17y^2=\pm 1$ 的各首兩個初解。

答： $\sqrt{17}=[4,\bar{8}]$。

對 $x^2-17y^2=-1$

取第一初解 $x=4, y=1$。

考慮 $$(4+\sqrt{17})^3 = 64+48\sqrt{17}+204+17\sqrt{17} = 268+65\sqrt{17}$$ 。

故第二初解 $x=268, y=65$。

對 $x^2-17y^2=1$

$\sqrt{17}=4+\frac{1}{8}=\frac{33}{8}$。

取第一初解 $x=33, y=8$。

考慮 $$(33+8\sqrt{17})^2 = 1089+528\sqrt{17}+1088 = 2177+528\sqrt{17}$$ 。

故第二初解 $x=2177, y=528$。

沒有數學知識，我們無法了解世上各事。

The things of this world cannot be made known without a knowledge of mathematics.

英國哲學家
羅吉爾・培根
(Roger Bacon 1214-1294)

8. 分數 $\frac{p}{q}$ 已化成最簡分式。若 $\frac{1997}{1998}<\frac{p}{q}<\frac{1998}{1999}$，其中 q 為最小可能正整數，求分數 $\frac{p}{q}$ 的值。

答：

$$\frac{1}{1998} > 1-\frac{p}{q} > \frac{1}{1999}$$

$$\frac{1}{1998} > \frac{q-p}{q} > \frac{1}{1999}$$

$$1998 < \frac{q}{q-p} < 1999$$

$$0 < \frac{q}{q-p}-1998 < 1$$

$$0 < \frac{1998p-1997q}{q-p} < 1$$

取 $\frac{1998p-1997q}{q-p}=\frac{1}{2}$，即 $\begin{cases}1998p-1997q=1\\ q-p=2\end{cases}$。

解 $\frac{p}{q}=\frac{3995}{3997}$。

9. 已知 p,q 為正整數。若 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{2}{7}$（其中 $p<q$），求 $p+q$ 的值。

答：

$$\frac{p+q}{pq} = \frac{2}{7}$$

$$2pq-7p-7q = 0$$

$$4pq-14p-14q = 0$$

$$4pq-14p-14q+49 = 49$$

$$(2p-7)(2q-7) = 49$$

$\begin{cases}2p-7=1\\ 2q-7=49\end{cases}$，即 $\begin{cases}p=4\\ q=28\end{cases}$。故 $p+q=4+28=32$。

10.　運用貪婪法把 $\frac{64}{89}$ 分拆成單位分數。

答：因為 $\left[\frac{89}{64}\right]+1=2$，　所以 $\frac{64}{89}-\frac{1}{2}=\frac{39}{178}$，

因為 $\left[\frac{178}{39}\right]+1=5$，　所以 $\frac{39}{178}-\frac{1}{5}=\frac{17}{890}$，

因為 $\left[\frac{890}{17}\right]+1=53$，　所以 $\frac{17}{890}-\frac{1}{53}=\frac{11}{47170}$，

因為 $\left[\frac{47170}{11}\right]+1=4289$，　所以 $\frac{11}{47170}-\frac{1}{4289}=\frac{9}{202312130}$，

因為 $\left[\frac{202312130}{9}\right]+1=22479126$，

所以 $\frac{9}{202312130}-\frac{1}{22479126}=\frac{1}{113694965399595}$。

所以 $\frac{64}{89}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{53}+\frac{1}{4289}+\frac{1}{22479126}+\frac{1}{113694965399595}$。

數學是科學的大門和鑰匙。

英國哲學家
羅吉爾•培根
(Roger Bacon 1214-1294)

淺問

1. 求把下列分數分拆成兩個單位分數的方案個數：
(a) $\frac{1}{10}$ (b) $\frac{5}{12}$ (c) $\frac{8}{15}$

2. 試以貪婪法把下列分數分拆成單位分數：
(a) $\frac{7}{12}$ (b) $\frac{29}{45}$ (c) $\frac{1805}{1806}$

3. 求把下列分數分拆成三個單位分數的方案個數：
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{13}{20}$

4. 把下列分數寫成連分數：
(a) $\frac{43}{30}$ (b) $\frac{56}{33}$ (c) $\frac{123}{56}$

5. 求下列連分數的值：
(a) $[2,\overline{2}]$ (b) $[1,\overline{4}]$ (c) $[5,\overline{3,1}]$

6. 若 $b=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{-\frac{1}{2}}}}$，求 b 的值。(HKMO 2010/11 決賽團體)

7. 試以循環連分數表示下列根值：
(a) $\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{15}$ (d) $\sqrt{18}$ (e) $\sqrt{23}$

8. 求下列佩爾方程的其中三個正整數解：
(a) $x^2-3y^2=1$ (b) $x^2-5y^2=-1$ (c) $x^2-15y^2=1$

9. 試以連分數方法解不列不定方程：
(a) $43x-30y=1$ (b) $123x-56y=8$

10. 若 p,q 為正整數，且 $\frac{7}{9}<\frac{p}{q}<\frac{11}{14}$，求 $p+q$ 的最小值。

詳答

1. (a) 設 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{10}$，且 $a>b>0$。

上式化成 $10(a+b) = ab$

$ab-10a-10b = 0$

$ab-10a-10b+100 = 100$

$(a-10)(b-10) = 100$

解得 $\begin{cases} a-10=100 \\ b-10=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-10=50 \\ b-10=2 \end{cases}$

或 $\begin{cases} a-10=25 \\ b-10=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a-10=20 \\ b-10=5 \end{cases}$

即 (a,b) = (110, 11)、(60, 12)、(35, 14)、(30, 15)。

共有 4 個方案。

(b) 設 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{5}{12}$，且 $a>b>0$。

上式化成 $12(a+b) = 5ab$

$5ab-12a-12b = 0$

$25ab-60a-60b = 0$

$25ab-60a-60b+144 = 144$

$(5a-12)(5b-12) = 144$

解得 $\begin{cases} 5a-12=144 \\ 5b-12=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 5a-12=72 \\ 5b-12=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 5a-12=48 \\ 5b-12=3 \end{cases}$

或 $\begin{cases} 5a-12=36 \\ 5b-12=4 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 5a-12=24 \\ 5b-12=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 5a-12=16 \\ 5b-12=9 \end{cases}$

當中僅 $\begin{cases} 5a-12=48 \\ 5b-12=3 \end{cases}$ 有整數解，即 $\begin{cases} a=12 \\ b=3 \end{cases}$

只有 1 個方案。

1.　(c)　設 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{8}{15}$，且 $a>b>0$。

$$\begin{aligned}
\text{上式化成}\quad 15(a+b) &= 8ab\\
8ab-15a-15b &= 0\\
64ab-120a-120b &= 0\\
64ab-120a-120b+225 &= 225\\
(8a-15)(8b-15) &= 225
\end{aligned}$$

解得 $\begin{cases}8a-15=225\\8b-15=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}8a-15=75\\8b-15=3\end{cases}$

或 $\begin{cases}8a-15=45\\8b-15=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}8a-15=25\\8b-15=9\end{cases}$

當中僅 $\begin{cases}8a-15=225\\8b-15=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}8a-15=25\\8b-15=9\end{cases}$ 有整數解。

即 $\begin{cases}a=30\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}8a-15=5\\8b-15=3\end{cases}$

故共有 2 個方案。

2.　(a)　因為 $\left[\frac{12}{7}\right]+1=2$，故得 $\frac{7}{12}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$。

所以 $\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$。

(b)　因為 $\left[\frac{45}{29}\right]+1=2$，故得 $\frac{29}{45}-\frac{1}{2}=\frac{13}{90}$。

因為 $\left[\frac{90}{13}\right]+1=7$，故得 $\frac{13}{90}-\frac{1}{7}=\frac{1}{630}$。

所以 $\frac{29}{45}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{630}$。

(c)　因為 $\left[\frac{1806}{1805}\right]+1=2$，故得 $\frac{1805}{1806}-\frac{1}{2}=\frac{451}{903}$。

因為 $\left[\frac{903}{451}\right]+1=3$，故得 $\frac{451}{903}-\frac{1}{3}=\frac{50}{301}$。

因為 $\left[\frac{301}{50}\right]+1=7$，故得 $\frac{50}{301}-\frac{1}{7}=\frac{1}{43}$。

所以 $\frac{1805}{1806}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}$。

3. (a) 設 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$ 且 $x>y>z>0$。

$\frac{3}{x} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}> \frac{1}{x}$

即 $3 < 2x \leq 9$

得 $2 \leq x \leq 4$

若 $x=2$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$，

$\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6} > \frac{1}{y}$

即 $6 < y \leq 12$

得 $7 \leq y \leq 12$

測試後得解 $(x,y,z)=(2,7,42),(2,8,24),(2,9,18),(2,10,15),$

若 $x=3$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3}$，

$\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{3} > \frac{1}{y}$

即 $3 < y \leq 6$

得 $4 \leq y \leq 6$

測試後得解 $(x,y,z)=(3,4,12)$。

若 $x=4$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{12}$，

$\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{12} > \frac{1}{y}$

即 $12 < 5y \leq 24$

得 $3 \leq y \leq 4$

要求 $y<x$，故無解。

即合共有 5 個方案。

3. (b) 設 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}$ 且 $x>y>z>0$ 。

$$\frac{3}{x} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{4}{5}> \frac{1}{x}$$

即 $5 < 4x \leq 15$

得 $2 \leq x \leq 3$

若 $x=2$ ， $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10}$ ，

$$\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{10} > \frac{1}{y}$$

即 $10 < 3y \leq 20$

得 $4 \leq y \leq 6$

測試後得解 $(x,y,z)=(2,4,20),(2,5,10)$ 。

若 $x=3$ ， $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{15}$ ，

$$\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{15} > \frac{1}{y}$$

即 $15 < 7y \leq 30$

得 $3 \leq y \leq 4$

經測試後，得不到整數 z。

故解的個數為 2。

3. (c) 設 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{20}$ 且 $x>y>z>0$。

$$\frac{3}{x} \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{20} > \frac{1}{x}$$

即 $20 < 13x \leq 60$

得 $2 \leq x \leq 4$

若 $x=2$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{20}$，

$$\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{20} > \frac{1}{y}$$

即 $20 < 3y \leq 40$

得 $7 \leq y \leq 16$

測試後得解 $(x,y,z)=(2,7,140),(2,8,40),(2,10,20),(2,12,15)$。

若 $x=4$，$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{5}$，

$$\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{5} > \frac{1}{y}$$

即 $5 < 2y \leq 10$

得 $3 \leq y \leq 5$

要求 $x>y>z$，故無解。

故解的個數為 4。

4. (a) $$\frac{43}{30} = 1+\frac{13}{30} = 1+\cfrac{1}{30/13} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{13}}$$

$$= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{13/4}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$$

(b) $$\frac{56}{33} = 1+\frac{23}{33} = 1+\cfrac{1}{33/23} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{10}{23}}$$

$$= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{23/10}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{10}}}$$

$$= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{10/3}}}$$

$$= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}}$$

(c) $$\frac{123}{56} = 2+\frac{11}{56} = 2+\cfrac{1}{56/11} = 2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{11}}$$

5. (a) 令 $x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$，

即 $x=2+\dfrac{1}{x}$，$x^2-2x-1=0$，

解得 $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2}$

$=1\pm\sqrt{2}$

顯然 $x>0$，故 $x=1+\sqrt{2}$。

(b) 令 $x=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\dots}}}$，

即 $x=\dfrac{1}{4+x}$，$x^2+4x-1=0$，

解得 $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\dfrac{-4\pm\sqrt{20}}{2}$

$=-2\pm\sqrt{5}$

顯然 $x>0$，故 $x=-2+\sqrt{5}$。

原式 $=x+1=-1+\sqrt{5}$。

5. (c) 設 $x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$，

所以 $x = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+x}} = \dfrac{1+x}{4+3x}$

所以 $x(4+3x) = 1+x$

$3x^2+3x-1 = 0$

$x = \dfrac{-(3)\pm\sqrt{(3)^2-4(3)(-1)}}{2(3)}$

$= \dfrac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

顯然 $x>0$，故 $x=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}$，

原式 $= x+5 = \dfrac{27+\sqrt{21}}{6}$。

6. $b = 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{-\frac{1}{2}}}} = 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(\frac{1}{2})}}}$

$= 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+2}} = 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{3}}$

$= 1-\cfrac{1}{(\frac{2}{3})} = 1-\dfrac{3}{2}$

$= -\dfrac{1}{2}$

7 (a)

$$\sqrt{3} = 1+(\sqrt{3}-1) = 1+\frac{3-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= 1+\frac{2}{\sqrt{3}+1} = 1+\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}+1}{2})}$$

$$= 1+\frac{1}{1+(\frac{\sqrt{3}-1}{2})} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{\sqrt{3}+1}}}$$

$$= 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{(\frac{\sqrt{3}+1}{2})}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\ldots}}}$$

所以 $\sqrt{3}=[1,\overline{1,2}]$ 。

(b)

$$\sqrt{5} = 2+(\sqrt{5}-2) = 2+\frac{5-4}{\sqrt{5}+2}$$

$$= 2+\frac{1}{\sqrt{5}+2} = 2+\frac{1}{4+(\sqrt{5}-2)}$$

$$= 2+\frac{1}{4+\frac{1}{\sqrt{5}+2}} = 2+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\ldots}}$$

所以 $\sqrt{5}=[2,\overline{4}]$ 。

7. (c) $\sqrt{15} = 3+(\sqrt{15}-3) = 3+\dfrac{15-9}{\sqrt{15}+3}$

$$= 3+\frac{6}{\sqrt{15}+3} = 3+\cfrac{1}{(\frac{\sqrt{15}+3}{6})}$$

$$= 3+\cfrac{1}{1+(\frac{\sqrt{15}-3}{6})} = 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{15}+3}}$$

$$= 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+(\sqrt{15}-3)}} = 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{(\frac{\sqrt{15}+3}{6})}}}$$

$$= 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

所以 $\sqrt{15}=[3,\overline{1,6}]$

(d) $\sqrt{18} = 4+(\sqrt{18}-4) = 4+\dfrac{18-16}{\sqrt{18}+4}$

$$= 4+\frac{2}{\sqrt{18}+4} = 4+\cfrac{1}{(\frac{\sqrt{18}+4}{2})}$$

$$= 4+\cfrac{1}{4+\frac{\sqrt{18}-4}{2}} = 4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\sqrt{18}+4}}$$

$$= 4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\sqrt{18}-4}} = 4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{(\frac{\sqrt{18}-4}{2})}}}$$

$$= 4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+,,,}}}$$ 所以 $\sqrt{18}=[4,\overline{4,8}]$ 。

7. (e) $\sqrt{23} = 4+(\sqrt{23}-4) = 4+\dfrac{23-16}{\sqrt{23}+4}$

$$= 4+\frac{7}{\sqrt{23}+4} = 4+\cfrac{1}{(\cfrac{\sqrt{23}+4}{7})}$$

$$= 4+\cfrac{1}{1+(\cfrac{\sqrt{23}-3}{7})} = 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{23-9}{7(\sqrt{23}+3)}}$$

$$= 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{\sqrt{23}+3}} = 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{(\cfrac{\sqrt{23}+3}{2})}}$$

$$= 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+(\cfrac{\sqrt{23}-3}{2})}} = 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{23-9}{2(\sqrt{23}+3)}}}$$

$$= 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{7}{\sqrt{23}+3}}} = 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{(\cfrac{\sqrt{23}+3}{7})}}}$$

$$= 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+(\cfrac{\sqrt{23}-4}{7})}}} = 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\sqrt{23}+4}}}}$$

$$= 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{7}{\sqrt{23}+4}}}}} = 4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

所以 $\sqrt{23} = [4,\overline{1,3,1,8}]$ 。

8. (a) $\sqrt{3}=[1,\overline{1,2}]$

因為 $1+\frac{1}{1} = 2$，

故第一解取 $x=2, y=1$。

因為 $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+1}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}} = 1+\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$，

故第二解取 $x=7, y=4$。

因為 $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+1}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}$

$= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{11}}$

$= 1+\frac{11}{15} = \frac{26}{15}$，

故第三解取 $x=26, y=15$。

(b) $\sqrt{5}=[2,\overline{4}]$

第一解取 $x=2, y=1$。

考慮 $(2+\sqrt{5})^3 = 8+12\sqrt{5}+30+5\sqrt{5}$，

$= 38+17\sqrt{5}$，

故第二解取 $x=38, y=17$。

考慮 $(2+\sqrt{5})^5$

$= 32+80\sqrt{5}+400+200\sqrt{5}+250+25\sqrt{5}$，

$= 682+305\sqrt{5}$，

故第二解取 $x=682, y=305$。

8. (c) $\sqrt{15}=[3,\overline{1,6}]$

因為 $3+\dfrac{1}{1} = 4$，

故第一解取 $x=4, y=1$。

因為 $3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{6+1}} = 3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{7}} = 3+\dfrac{7}{8} = \dfrac{31}{8}$，

故第二解取 $x=31, y=8$。

因為 $3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{6+1}}}} = 3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{6+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{7}}}}$

$= 3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{6+\dfrac{7}{8}}} = 3+\dfrac{1}{1+\dfrac{8}{55}}$

$= 3+\dfrac{55}{63} = \dfrac{244}{63}$，

故第三解取 $x=244, y=63$。

9. (a) $\dfrac{43}{30} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}$

考慮 $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}} = 1+\dfrac{3}{7} = \dfrac{10}{7}$ 。

故得初解 $x=(-1)^{3-1}\times 7=7$ ， $y=(-1)^{3-1}\times 10=10$ 。

故解為 $x=7+30t$ ， $y=10+43t$ ，其中 t 為任意整數。

(b) $\dfrac{123}{56} = 2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{11}}$

考慮 $2+\dfrac{1}{5} = \dfrac{11}{5}$ 。

$123x-56y=1$ 的初解為

$x=(-1)^{2-1}\times 5=-5$ ， $y=(-1)^{2-1}\times 11=-11$ 。

$123x-56y=8$ 的初解為 $x=-5\times 8=-40$ ， $y=-11\times 8=-88$ 。

故解為 $x=-40+56t$ ， $y=-88+123t$ ，其中 t 為任意整數。

10. $\dfrac{7}{9} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{11}{14}$

$\dfrac{2}{9} > 1-\dfrac{p}{q} > \dfrac{3}{14}$

$\dfrac{9}{2} < \dfrac{q}{q-p} < \dfrac{14}{3}$

$\dfrac{1}{2} < \dfrac{q}{q-p}-4 < \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{2} < \dfrac{4p-3q}{q-p} < \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{2}(q-p) < 4p-3q < \dfrac{2}{3}(q-p)$

取 $q-p=5$，得 $\dfrac{5}{2}<4q-5p<\dfrac{10}{3}$ ，

即解 $\begin{cases} q-p=5 \\ 4q-5p=3 \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} p=18 \\ q=23 \end{cases}$ ，故 $p+q=18+23=41$ 。