「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

數論 － 進位制

摘要

1. 十進制的整數、小數與不同進位制之間的轉化。
2. 不同進位制的整數、小數與十進制之間的轉化。
3. 解答與進位制相關的問題。
4. 淺介水仙花數的性質。

拾例

1. 把 123_7 化成十進制數。

答： $123_7 = 1\times 49+2\times 7+3 = 66$。

2. 把 十進制數 123 化成七進制數。

答： $123 = 2\times 49+3\times 7+4 = 234_7$。

3. 把自然數中所有數字只有 0 或 1 的整數依從小到大的順序排成一列，求此數列中的第 1010 項。

答： $1010 = 512+256+128+64+32+16+2$
$= 1111110010_2$。
故對應的數為 1111110010。

4. 把自然數中所有數字都為偶數的數依從小到大的順序排成一列，求此數列中的第 2468 項。

答： $2468 = 34333_5$。
由於 0, 1, 2, 3, 4 分別對應 0, 2, 4, 6, 8。
故該數為 68666。

5. 把十進制數 $\frac{1}{3}$ 化成五進制小數。

答： $\frac{1}{3}\times 5 = 1\frac{2}{3}$， 故先取 1。
$\frac{2}{3}\times 5 = 3\frac{1}{3}$， 故再取 3。重回 $\frac{1}{3}$。
$\frac{1}{3} = 0.\overline{13}_5$ 。

6. 把五進制數 $0.\overline{34}_5$ 化成十進制分數。

答： 原式 $= (\frac{3}{5}+\frac{4}{25})(1+\frac{1}{25}+\frac{1}{625}+...) = \frac{19}{25}\times\frac{1}{1-\frac{1}{25}}$
$= \frac{19}{25}\times\frac{25}{24} = \frac{19}{24}$ 。

7. 計算 $1A_{11}+2B_{12}+3C_{13}$ 的值並以十進制表示答案。

答： 原式 $=(11+10)+(2\times11+12)+(3\times13+12)=105$。

8. 方程式 $234_X+56_{3X}=150_{2X}$，其中 X 為正整數，求 X 的值。

答： 把方程式中的數轉化為十進制數，得

$$\begin{aligned} 2X^2+3X+4+5(3X)+6 &= (2X)^2+5(2X) \\ 2X^2+18X+10 &= 4X^2+10X \\ 2X^2-8X-10 &= 0 \\ X^2-4X-5 &= 0 \end{aligned}$$

解得 $X=5$ 或 $X=-1$（捨去）。

9. 一個 n 位數，若它的數值等於其各位數的 n 次方總和，我們稱此數為水仙花數。如 $370=3^3+7^3+0^3$。求所有九進制兩位水仙花數的總和。（答案以十進制表示。）

答： 設四進制兩位水仙花數為 $\overline{ab}=9a+b=a^2+b^2$。

若取 $a=1$，得 $b+9=b^2+1$，即 $b^2-b-8=0$。無整數解。
若取 $a=2$，得 $b+18=b^2+4$，即 $b^2-b-14=0$。無整數解。
若取 $a=3$，得 $b+27=b^2+9$，即 $b^2-b-18=0$。無整數解。
若取 $a=4$，得 $b+36=b^2+16$，即 $b^2-b-20=0$。得解 $b=5$。
若取 $a=5$，得 $b+45=b^2+25$，即 $b^2-b-20=0$。得解 $b=5$。
若取 $a=6$，得 $b+54=b^2+36$，即 $b^2-b-18=0$。無整數解。
若取 $a=7$，得 $b+63=b^2+49$，即 $b^2-b-14=0$。無整數解。
若取 $a=8$，得 $b+72=b^2+64$，即 $b^2-b-8=0$。無整數解。
所以九進制兩位水仙花數只有兩個，即 $45_9, 55_9$，
即十進制的41, 50，總和為 $41+50=91$。

10. 把所有 7 的方冪及互不相等的 5 的方冪的和排成一個遞增數列：1, 7, 8, 49, 50, ... 求這個數列的第 100 項。

答： 將已知數列寫成 7 的方冪和形式：
$1=7^0$，$7=7^1$，$8=7^1+7^0$，$49=7^2$，$50=7^2+7^0\ldots$
發現其項數恰好應自然數列的對應二進制形式。
$100=1100100_2=2^6+2^5+2^2$，

故第 100 項為 $7^6+7^5+7^2=117649+16807+49=134505$。

淺問

1. 把下列指定進制的整數轉化為十進制數。
   (a) 101010_2　　(b) 1234_5　　(c) $4AB_{16}$

2. 把十進制數 1997 轉化為三進制數、八進制數和十六進制數。

3. 把下列指定進制的有限小數轉化為十進制分數。
   (a) 0.1_2　　(b) 0.34_5　　(c) 0.678_9

4. 把下列指定進制的循環小數轉化為十進制分數。
   (a) $0.\dot{1}_2$　　(b) $0.\dot{4}\dot{3}_5$　　(c) $0.\dot{8}7\dot{6}_9$

5. 把十進制小數 0.3 分別轉化為二進制小數、三進制小數和五進制小數。

6. 計算 $1_2+11_2+111_2+1111_2+11111_2+111111_2+1111111_2$，並以二進制表示答案。

7. 試以十進制表示下列各算式的答案：
   (a) $2011_3+2012_4+2013_5+2014_6$
   (b) $1A_{12}\times 2B_{13}+3C_{14}\times 4D_{15}$

8. 把所有 3 的方冪及互不相等的 3 的方冪的和排成一個遞增數列：1, 3, 4, 9, 10, ... 求這個數列的第 100 項。(AIME 1986)

9. 方程式 $132_A+43_B=69_{A+B}$，其中 A,B 為連續正整數，求 $A+B$ 的值。(AMC 12 2012)

10. N 是一個整數，它的 b 進制表示為 777。求最小的正整數 b 使 N 是十進制整數的四次方。(CANMO 1977)

11. 一個 n 位數，若它的數值等於其各位數的 n 次方總和，我們稱此數為水仙花數。如 $370=3^3+7^3+0^3$。求所有七進制兩位水仙花數的總和。(答案以十進制表示。)

詳答

1. (a) $101010_2 = 1\times2^5+1\times2^3+1\times2$
$= 32+8+2 = 42$

(b) $1234_5 = 1\times5^3+2\times5^2+3\times5+4$

$= 125+50+15+4 = 194$

(c) $4AB_{16} = 4\times16^2+10\times16+11$

$= 1024+160+11 = 1195$

2. $1997 = 2\times3^6+2\times3^5+0\times2^4+1\times3^3+2\times3^2+2\times3+2$
$= 2201222_3$

$1997 = 3\times8^3+7\times8^2+1\times8+5 = 3715_8$

$1997 = 7\times16^2+12\times16+13 = 7CD_{16}$

3. (a) $0.1_2 = 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(b) $0.34_5 = 3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{25} = \frac{19}{25}$

(c) $0.678_9 = 6\times\frac{1}{9}+7\times\frac{1}{81}+8\times\frac{1}{729} = \frac{557}{729}$

4. (a) $0.\dot{1}_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}}$

$= 1$

(b) $0.\dot{4}\dot{3}_5 = \frac{4}{5}+\frac{3}{25}+\frac{4}{125}+\frac{3}{625}+\ldots$

$= (\frac{4}{5}+\frac{3}{25})\div(1-\frac{1}{25})$

$= \frac{23}{25}\times\frac{25}{24} = \frac{23}{24}$

(c) $0.\dot{8}7\dot{6}_9 = \frac{8}{9}+\frac{7}{81}+\frac{6}{729}+\frac{8}{2187}+\ldots$

$= (\frac{8}{9}+\frac{7}{81}+\frac{6}{729})\div(1-\frac{1}{729})$

$= \frac{717}{729}\times\frac{729}{728} = \frac{717}{728}$

5. $0.3\times 2^2 = 1.2$ => 01

$0.2\times 2^3 = 1.6$ => 001

$0.6\times 2 = 1.2$ => 1

所以 0.3 = $0.0\dot{1}00\dot{1}_2$ 。

$0.3\times 3^2 = 2.7$ => 02

$0.7\times 3 = 2.1$ => 2

$0.1\times 3 = 0.3$ => 0

所以 0.3 = $0.\dot{0}22\dot{0}_3$ 。

$0.3\times 5 = 1.5$ => 1

$0.5\times 5 = 2.5$ => 2

所以 0.3 = $0.1\dot{2}_5$ 。

6. $1_2 + 11_2 + 111_2 + 1111_2 + 11111_2 + 111111_2 + 1111111_2$

$= 10_2 - 1_2 + 100_2 - 1_2 + 1000_2 - 1_2 + 10000_2 - 1_2 + 100000_2 - 1_2 + 1000000_2 - 1_2$
$+ 10000000_2 - 1_2$

$= 11111110_2 - 110_2 = 11111000_2$

7. (a) $2011_3 + 2012_4 + 2013_5 + 2014_6$

$= (2\times3^3 + 1\times3 + 1) + (2\times4^3 + 1\times4 + 2)$
$\quad + (2\times5^3 + 1\times5 + 3) + (2\times6^3 + 1\times6 + 4)$

$= 58 + 134 + 258 + 442 = 892$

(b) $1A_{12} \times 2B_{13} + 3C_{14} \times 4D_{15}$

$= (1\times12 + 10)\times(2\times13 + 11) + (3\times14 + 12) + (4\times15 + 13)$

$= 22\times37 + 54\times73 = 4756$

8. 將已知數列寫成 3 的方冪和形式：

$1 = 3^0$，$3 = 3^1$，$4 = 3^1 + 3^0$，$9 = 3^2$，$10 = 3^2 + 3^0 \ldots$

發現其項數恰好應自然數列的對應二進制形式。

$100 = 1100100_2 = 2^6 + 2^5 + 2^2$，

故第 100 項為 $3^6 + 3^5 + 3^2 = 981$。

9. 把方程式中的數轉化為十進制數，得

$A^2 + 3A + 2 + 4B + 3 = 6(A + B) + 9$

$A^2 - 3A - 2B - 4 = 0$

由於 A, B 為連續正整數，即 $B = A + 1$ 或 $B = A - 1$，

代入得 $A^2 - 3A - 2(A + 1) - 4 = 0$，即 $A^2 - 5A - 6 = 0$

解得 $A = 6$ 或 $A = -1$（捨去）

或 $A^2 - 3A - 2(A - 1) - 4 = 0$，即 $A^2 - 5A - 2 = 0$，無整數解。

故得 $A = 6, B = 7$，即 $A + B = 13$。

10. 本題等價於 $7b^2 + 7b + 7 = x^4$，對 x 有整數解。

$7(b^2 + b + 1) = x^4$

故 x 必為 7 的倍數，令 $x = 7k$，得

$b^2 + b + 1 = 7^3 k^4 = 343k^4$

取 $k = 1$，試解。

$b^2 + b - 342 = 0$

$(b - 18)(b + 19) = 0$

解得 $b = 18$。（負值捨去）

11. 設七進制兩位水仙花數為 $\overline{ab}=7a+b=a^2+b^2$。

若取 $a=1$，得 $b+7=b^2+1$，即 $b^2-b-6=0$。得解 $b=3$。
若取 $a=2$，得 $b+14=b^2+4$，即 $b^2-b-10=0$。無整數解。
若取 $a=3$，得 $b+21=b^2+9$，即 $b^2-b-12=0$。得解 $b=4$。
若取 $a=4$，得 $b+28=b^2+16$，即 $b^2-b-12=0$。得解 $b=4$。
若取 $a=5$，得 $b+35=b^2+25$，即 $b^2-b-10=0$。無整數解。
若取 $a=6$，得 $b+42=b^2+36$，即 $b^2-b-6=0$。得解 $b=3$。
所以七進制兩位水仙花數共有四個，即 $13_7,34_7,44_7,63_7$，
即十進制的10, 25, 32, 45，總和為 $10+25+32+45=112$。

凡數學家的內心深處必爲詩人。

俄羅斯數學家

柯瓦列夫斯卡婭

(Sofia Kovalevskaya 1850-1891)