「噢！數？」拾例集　　　周浩然輯

組合 －二項式定理

摘要

1. 運用階乘：
   （a）　$n!=n(n-1)(n-2)...1$　及　$0!=1$
   （b）　$n\times n!=(n+1)!-n!$
   （c）　$\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$
2. 運用二項式系數：
   $C_r^n=\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...1}$
   及其相關的一些性質：
   （a）　$C_r^n=C_{n-r}^n$
   （b）　$C_{r-1}^n+C_r^n=C_r^{n+1}$
   （c）　$C_0^n+C_1^n+C_2^n+...+C_n^n=2^n$
3. 解含有組合的方程。
4. 求展開式的項數、項值等。
5. 利用二項式定理 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}C_r^n a^{n-r}b^r$　求系數、最大項等。
6. 利用多項式定理 $(a+b+c+...)^n=\sum\frac{n!}{p!q!r!...}a^p b^q c^r...$，
   其中 $p+q+r+...=n$，求展開式的系數。

拾例

1. 求 C_6^{2012} 的個位數字。

答： $C_6^{2012} = \dfrac{2012\times2011\times2010\times2009\times2008\times2007}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$

$= 503\times2011\times67\times2009\times1004\times669$

個位數字為 $= 3\times1\times7\times9\times4\times9$ 的個位

$= 4$。

2. 求 $C_2^{10}+C_3^{10}+C_4^{10}+\ldots+C_9^{10}$ 的值。

答： $(1+x)^{10} = C_0^{10}+C_1^{10}x+C_2^{10}x^2+\ldots+C_{10}^{10}x^{10}$

代 $x=1$，得

$C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\ldots+C_{10}^{10} = 2^{10} = 1024$

上式 $= 1024-1-1-10 = 1012$。

3. 求 $C_1^9+2C_2^9+3C_3^9+\ldots+9C_9^9$ 的值。

答： 令 $S=C_1^9+2C_2^9+3C_3^9+\ldots+9C_9^9=C_8^9+2C_7^9+3C_6^9+\ldots+9C_0^9$

所以 $2S = (0+9)C_0^9+(1+8)C_1^9+(2+7)C_2^9+\ldots+(9+0)C_9^9$

$= 9(C_0^9+C_1^9+C_2^9+\ldots+C_9^9)$

$= 9\times2^9$

$S = 9\times2^8 = 2304$。

4. 若 $C_y^{24}=C_{2y-6}^{24}$，求 y 的所有可能值之和。

答： 若 $y=2y-6$，即得 $y=6$。

或 $y+2y-6=24$，即 $y=10$。

故 y 的所有可能值之和為 $6+10=16$。

5. 求 $(x+y)^{20}$ 及 $(a+b+c)^{20}$ 展開式經整理後的項數。

答： $(x+y)^{20} = \sum_{r=0}^{20} C_r^n x^{n-r} y^r$，故展開式共 21 項。

$(a+b+c)^{20} = \sum_{r=0}^{20} C_r^{20} (a+b)^{20-r} c^r$，這裡共有 21 項，

再考慮在不同的指數下，把 $(a+b)^k$ 展開，這兒 $k=0,1,2...,21$

即總項數為 1 + 2 + 3 + ⋯ + 21 $= \dfrac{21\times(21+1)}{2}$

$= 231$

（註：我們亦可以 C_2^{n+2} 來計算 $(a+b+c)^n$ 的展開式的總項數。）

6. 在 $(ax+b)^{100}$ 的展開式中，a,b 是互素的正整數，若 x^{19},x^{18} 的系數相同，求 $\delta=a+b$ 的值。

答： x^{18} 的系數為 $C_{18}^{100}a^{18}b^{82}$，x^{19} 的系數為 $C_{19}^{100}a^{19}b^{81}$

即 $C_{18}^{100}a^{18}b^{82} = C_{19}^{100}a^{19}b^{81}$

$\dfrac{100!}{18!\times 82!}\times a^{18}\times b^{82} = \dfrac{100!}{19!\times 81!}\times a^{19}\times b^{81}$

$\dfrac{b}{82} = \dfrac{a}{19}$

因此有 $19b = 82a$。

因為 $(a,b)=1$，故有 $a=19, b=82$，$\delta = a+b = 19+82 = 101$。

7. 求 $(x+1)(x-1)^{10}$ 的展開式中 x^5 的系數。

答： 原式 $= (x+1)(x^{10} - C_1^{10}x^9 + C_2^{10}x^8 - ... + 1)$

系數為 $C_4^{10} - C_3^{10} = \dfrac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} - \dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}$

$= 210 - 120 = 90$。

8. 若 $(2x-1)^5 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$，求 $a_2 + a_4$ 的值。
（中國北京市中學生數學競賽 2003 初二複賽）

答： 代 $x=0$，得 $a_0 = [2(0)-1]^5 = -1$。

代 $x=1$，得 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = [2(1)-1]^5 = 1$。

代 $x=-1$，得 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = [2(-1)-1]^5 = -243$。

把第二式和第三式相加，得

$$2(a_0 + a_2 + a_4) = -242$$

$$a_0 + a_2 + a_4 = -121$$

代第一式： $-1 + a_2 + a_4 = -121$

所以 $a_2 + a_4 = -120$。

9. 求 $(x+3)^7$ 的展開式中的最大系數。

答： 展開後第 $r+1$ 項與第 r 項的比為

$$\frac{C_r^7 3^r}{C_{r-1}^7 3^{r-1}} = \frac{7!3^r}{(7-r)!r!} \times \frac{(7-r+1)!(r+1)!}{7!3^{r-1}}$$

$$= \frac{2(11-r)}{r}$$

取 $\frac{24-3r}{r} = 1$

$24-4r = 0$

r $= 6$

即 $r=6$ 為最大系數項，

即最大系數 $= C_6^7 3^6 = 7 \times 729 = 5103$。

10. 求 $(x+1+\frac{1}{x})^7$ 的展開式中的常數項。

答： 解法一：

$$(x+1+\frac{1}{x})^7 = \sum_{r=0}^{7} C_r^7 (x+\frac{1}{x})^r$$ 。

再看 $(x+\frac{1}{x})^r = \sum_{s=0}^{r} C_s^r x^{r-2s}$ 。

顯然，只有當 $r = 0,2,4,6$ 時，

$(x+\frac{1}{x})^r$ 的展開式中才有常數項。

$$\begin{aligned}
\text{故常數項} &= C_0^7 + C_2^7 \times C_1^2 + C_4^7 \times C_2^4 + C_6^7 \times C_3^6 \\
&= 1 + \frac{7\times 6}{2\times 1}\times 2 + \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}\times\frac{4\times 3}{2\times 1} + 7\times\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1} \\
&= 1+42+210+140 = 393
\end{aligned}$$
。

解法二：

設分別從七個括號中取出 a 個 x 和 b 個 $\frac{1}{x}$ 得出常數項。

即 $a-b=0$ ，故得解 $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}, \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}, \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$ 。

$$\begin{aligned}
\text{故常數項} &= \frac{7!}{0!0!7!} + \frac{7!}{1!1!5!} + \frac{7!}{2!2!3!} + \frac{7!}{3!3!1!} \\
&= 1+42+210+140 = 393
\end{aligned}$$
。

淺問

1. 解下列方程：

 (a) $C_2^n = 78$ (b) $C_n^{24} = C_{3n}^{24}$

2. 求下列各式的值：

 (a) $C_1^{10} + C_2^{10} + C_3^{10} + \ldots + C_{10}^{10}$

 (b) $C_1^{2011} - 2C_2^{2011} + 2^2 C_3^{2011} - \ldots + 2^{2010} C_{2011}^{2011}$

 (c) $(C_0^8)^2 + (C_1^8)^2 + (C_2^8)^2 + \ldots + (C_8^8)^2$

3. 求 C_3^{2011} 的個位數字。(培正 2011 初賽中四)

4. 求 $(1+x^5+x^7)^{20}$ 展開式中 x^{17} 項的系數。(MMO 1947)

5. 求 $(a-\frac{1}{\sqrt{a}})^7$ 的展開式中的 $a^{-\frac{1}{2}}$ 的系數。(AHSME 1963)

6. 求 $x(1+x)^4 + x^2(1+2x)^8 + x^{3x}(1+3x)^{12}$ 展開式中 x^4 的系數。

7. 求 $(x+3)^7$ 的展開式中系數最大的一項的系數。

8. 若 $(ax-1)^5$ 的展開式中 x^3 的系數是 80，求實數 a 的值。
 (中國湖南省高考 2006)

9. 若 $(1-2x)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_7x^7$，求 $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$ 的值。

10. 求 $(\sqrt[3]{2}-1)^{10}$ 展開式中所有有理項的系數總和。

11. 若 $(1-3x)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_9x^9$，求$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_9|$。

12. 求 $(a+2b+3c+4d)^{10}$ 的展開式中 $ab^2c^3d^4$ 的系數。

13. 求下列展開式經整理後的項數：

 (a) $(x+y)^{10}$ (b) $(a+b+c)^{10}$

14. 求展開 $(x^3+2x^2+3x+4)^5$ 後，展開式中 x^3、x^5 及 x^7 的系數。

詳答

1. (a)

$$\begin{aligned} C_2^n &= 78 \\ \frac{n(n-1)}{2\times 1} &= 78 \\ n^2-n-156 &= 0 \\ (n-13)(n+12) &= 0 \end{aligned}$$

$n=13$ 或 $n=-12$（捨去）

(b) 若 $n=3n$，即 $n=0$。

若 $n+3n=24$，即 $n=6$。

故解為 $n=0,6$。

2. (a)

$$(1+x)^{10} = C_0^{10}+C_1^{10}x+C_2^{10}x^2+\ldots+C_{10}^{10}x^{10}$$

代 $x=1$ 得，

$$2^{10} = 1+C_1^{10}+C_2^{10}+\ldots+C_{10}^{10}$$

所以 $C_1^{10}+C_2^{10}+C_3^{10}+\ldots+C_{10}^{10} = 2^{10}-1 = 1023$

(b)

$$(1+2x)^{2011} = C_0^{2011}+C_1^{2011}(2x)+C_2^{2011}(2x)^2+\ldots+C_{2011}^{2011}(2x)^{2011}$$

代 $x=-1$ 得，

$$0^{2011} = 1-2C_1^{2011}+2^2C_2^{2011}-2^3C_3^{2011}+\ldots-2^{2011}C_{2011}^{2011}$$

所以 $C_1^{2011}+2C_2^{2011}-2^2C_3^{2011}+\ldots-2^{2010}C_{2011}^{2011} = \frac{1}{2}$

(c)

$$(1+x)^{16} = (1+x)^8\times(x+1)^8$$

右方 $= (C_0^8+C_1^8x+C_2^8x^2+\ldots+C_8^8x^8)\times(C_0^8x^8+C_1^8x^7+C_2^8x^6+\ldots+C_8^8)$

左方 $= C_0^{16}+C_1^{16}x+C_2^{16}x^2+\ldots+C_{16}^{16}x^{16}$

其中展開式中 x^8 的系數為 $(C_0^8)^2+(C_1^8)^2+(C_2^8)^2+\ldots+(C_8^8)^2=C_8^{16}$

故答案為 $\frac{16\times15\times14\times13\times12\times11\times10\times9}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 12870$

3. $C_3^{2011} = \frac{2011\times2010\times2009}{3\times2\times1} = 2011\times335\times2009$

所以個位數字為 5。

4. 由於 x^{17} 只可由兩個 x^5 和一個 x^7 組合而成，

即系數 $= C_2^{20}\times C_1^{18} = \frac{20\times19}{2}\times\frac{18}{1} = 3420$。

5. 展開式中第 r+1 項為 $C_r^7 a^{7-r}(-1)^r(a^{-\frac{1}{2}})^r = (-1)^r C_r^7 a^{7-r-\frac{r}{2}}$

$= (-1)^r C_r^7 a^{7-\frac{3r}{2}}$

令 $7-\frac{3r}{2} = -\frac{1}{2}$

$-\frac{3r}{2} = -\frac{15}{2}$

$r = 5$

所以系數為 $(-1)^5 C_5^7 = -\frac{7\times 6}{2\times 1} = -21$。

6. 展開式中 x^2 的系數為 $C_3^4 + 2^2 C_2^8 + 3C_1^{12} = 4+4\times 28+3\times 12$

$= 152$

7. 展開式的一般項的系數為 $T_{r+1} = C_r^7 3^r$

$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{C_r^7 3^r}{C_{r-1}^7 3^{r-1}} = \frac{7!\times 3^r}{r!(7-r)!}\times\frac{(r-1)!(7-r+1)!}{7!\times 3^{r-1}}$

$= \frac{3(8-r)}{r}$

取 $\frac{24-3r}{r} = 1$

$24-4r = 0$

$r = 6$

即最大項為 $T_7 = C_6^7 3^6 = 7\times 729 = 5103$。

8. 展開式中第 $r+1$ 項為 $C_r^5(ax)^{5-r}(-1)^r = C_r^5 x^{5-r}(-1)^r(a)^{5-r}$。

令 $5-r=3, r=2$，即 $C_2^5 a^3(-1)^2 = 80$

$10a^3 = 80$

$a^3 = 8$

$a = 2$

9. 代 $x=1$ 得， $a_0+a_1+a_2+\ldots+a_7=(1-2)^7=-1$

代 $x=-1$ 得，$a_0-a_1+a_2-\ldots-a_7=(1+2)^7=2187$

原式 $=\frac{1}{2}[(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_7)-(a_0-a_1+a_2-\ldots-a_7)]$

$=\frac{1}{2}[(2187)-(-1)]=1094$

10. 展開式的一般項為 $T_{n+1}=(-1)^n C_n^{10}(\sqrt[3]{2})^{10-n}$

$=(-1)^n C_n^{10}\times 2^{\frac{10-n}{3}}$

有理項即 $m=\dfrac{10-n}{3}$ 為整數，即 $n=1,4,7,10$ ，對應 $m=3,2,1,0$ 。

所以有理項系數總和為

$(-1)^1C_1^{10}\times 2^3+(-1)^4C_4^{10}\times 2^2+(-1)^7C_7^{10}\times 2^1+(-1)^{10}C_{10}^{10}\times 2^0$

$=-10\times 8+210\times 4-228\times 2+1\times 1=305$

11. 不難得知展開後 a_0,a_2,a_4,a_6,a_8 為正，其餘為負。

所以原式 $=a_0-a_1+a_2-\ldots-a_9=(1+3)^9$

$=262144$。

12. 所求系數 $=\dfrac{10!}{1!\times 2!\times 3!\times 4!}\times 1^1\times 2^2\times 3^3\times 4^4$

$=\dfrac{3628800}{1\times 2\times 6\times 24}\times 1\times 4\times 27\times 256$

$=12600\times 1\times 4\times 27\times 256$

$=348364800$。

13. (a) $(x+y)^{10}=\sum_{r=0}^{10}C_r^n x^{n-r}y^r$ ，故展開式共 11 項。

(b) $(a+b+c)^{10}=\sum_{r=0}^{10}C_r^n(a+b)^{n-r}c^r$ ，這裡共有 11 項，

再考慮在不同的指數下，把 $(a+b)^k$ 展開，這兒 $k=0,1,2\ldots,10$

即總項數為 1 + 2 + 3 + ⋯ + 11 $=\dfrac{11\times(11+1)}{2}$

$=66$

我們亦可以 C_2^{n+2} 來計算 $(a+b+c)^n$ 的展開式的總項數。

14. 考慮 $3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$

即 x^3 項可以來自其中一個括號中的 x^3 和別的常數項的乘積，亦可來自其中兩個括號中的 x^2 和 x 項的乘積，也可以來自三個括號中的 x 項的乘積。

故 x^3 的系數

$$= \frac{5!}{1!\times 4!}(1)(4)^4 + \frac{5!}{1!\times 1!\times 3!}(2)(3)(4)^3 + \frac{5!}{2!\times 3!}(3)^3(4)^2$$

$$= 1280 + 7680 + 4320$$

$$= 13280$$

考慮 $5 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

故 x^5 的系數

$$= \frac{5!}{1!\times 1!\times 3!}(1)(2)(4)^3 + \frac{5!}{1!\times 2!\times 2!}(1)(3)^2(4)^2$$

$$+ \frac{5!}{1!\times 2!\times 2!}(2)^2(3)(4)^2 + \frac{5!}{1!\times 1!\times 3!}(2)(3)^3(4) + \frac{5!}{5!}(3)^5$$

$$= 2560 + 4320 + 5760 + 4320 + 243$$

$$= 17203$$

考慮

$7 = 3 + 3 + 1 = 3 + 2 + 2 = 3 + 2 + 1 + 1 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1 + 1$

故 x^7 的系數

$$= \frac{5!}{1!\times 2!\times 2!}(1)^2(3)(4)^2 + \frac{5!}{1!\times 2!\times 2!}C_1^5 C_2^4 (1)(2)^2(4)^2$$

$$+ \frac{5!}{1!\times 1!\times 1!\times 2!}(1)(2)(3)^2(4) + \frac{5!}{1!\times 4!}(1)(3)^4$$

$$+ \frac{5!}{1!\times 1!\times 3!}(2)^3(3)(4) + \frac{5!}{2!\times 3!}(2)^2(3)^3$$

$$= 1440 + 1920 + 4320 + 405 + 1920 + 1080$$

$$= 11085$$

我只要拿張紙，坐下，就能思考。

匈牙利數學家

愛爾特希

(Paul Erdos 1913-1996)