「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

組合 －排列與組合

摘要

1. (a) 從 n 個元素中選取 r 個不許重複的組合數目：

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...1}$$

(b) 從 n 個元素中選取 r 個可以重複的組合數目：

$$H_r^n = C_{r-1}^{n+r-1}$$

2. 從 n 個元素中選取 r 個不許重複的排列數目：

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

(a) $P_n^n = n!$

(b) $P_r^n = r!C_r^n$

從 n 個元素中選取 r 個可重複的排列數目為 n^r。

3. 利用綑綁法、插隊法等解決排列、組合應用題的技巧。
4. 從 n 個元素中選取 r 個不許重複的圓排列數目：

$$R_r^n = \frac{P_r^n}{r}$$

註：如穿項鏈、手鐲等左旋和右旋視作相同，其圓排列數目為 $\frac{P_r^n}{2r}$ 。

5. 運用多項式定理計算可重排列數目

$$E_r = \frac{r!}{r_1!r_2!r_3!...r_n!}$$，其中 $r = r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n$

6. 整數分拆問題：

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_r = n$$

(a) 若 $a_1, a_2, a_3, ..., a_r$ 為非負整數，則解的個數為 $H_r^n = C_{r-1}^{n+r-1}$ 。

(b) 若 $a_1, a_2, a_3, ..., a_r$ 為正整數，則解的個數為 $H_r^{n-r} = C_{r-1}^{n-1}$ 。

拾例

1. 計算 $P_1^2+P_2^4+P_3^6+P_4^8$ 的值。

答： 原式 $= 2+4\times3+6\times5\times4+8\times7\times6\times5 = 2+12+120+1680$
$= 1814$。

2. 一個袋中有 8 個紅波、9 個黃波、 6 個藍波 和 4 個綠波，求
(a) 抽出三個完全同顏色的波的組合數目。
(b) 抽出三個全不同顏色的波的組合數目。

答： (a) 組合數目 $= C_3^8+C_3^9+C_3^6+C_3^4$

$$= \frac{8\times7\times6+9\times8\times7+6\times5\times4+4\times3\times2}{6}$$

$$= \frac{336+504+120+24}{6} = \frac{984}{6}$$

$= 166$。

(b) 組合數目 $= (8\times9\times6+9\times6\times4+6\times4\times8+4\times8\times9)\times6$
$= (432+216+192+288)\times6$
$= 1128\times6 = 6768$。

3. 一委員會有 6 名女委員和 12 名男委員。現得從中選六人組成一小組，小組成員中至少有兩名男委員且女委員數目不得少於男委員的數目。求不同的小組選擇方案數目。(FWMT-J 1998)

答： 依題意，小組可由 2 男 4 女或 3 男 3 女組成。
故選擇數為 $= C_4^6\times C_2^{12}+C_3^6\times C_3^{12}$

$$= \frac{6\times5}{2\times1}\times\frac{12\times11}{2\times1}+\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}$$

$= 15\times66+20\times220 = 5390$。

4. 6 個男生和 4 個女生排成一列，問下列情況各共有多少種排法。
(a) 要求女生必須排在一起。
(b) 要求任何兩個女生不可相鄰。

答： (a) 即把 4 個女生視為一人，
故排法數為 $P_7^7\times P_4^4 = 5040\times24 = 120960$。

(b) 先把六個男生排成一行，
再把四名女生安插入男生前後的七個空位中。
故排法數為 $P_6^6\times P_4^7 = 720\times840 = 604800$。

5. 甲、乙、丙三位同學選修課程，從 4 門課程中，甲選修 2 門，乙、丙各選修 3 門，問有多少種不同的選擇方案？（中國全國高考 2007）

答： 選擇方案數 $= C_2^4 \times C_3^4 \times C_3^4 = \frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}\times\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}$

$= 6\times4\times4 = 96$

6. 把六男四女分成兩組，使每組男、女生人數相同，問有多少種分法？

答： 在六男四女中選出三男兩女編入第一組，但由於選和不選的兩組人數相同，故得把總分法數目除以 2，

即分法數目 $= \frac{C_3^6 \times C_2^4}{2}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times\frac{4\times3}{2\times1}$

$= \frac{1}{2}\times10\times6 = 30$。

7. 用 0, 1, 2, 3, 4 這五個數字，

(a) 組成多少個三個數字可重覆的三位數，並求這些三位數的總和。

(b) 組成多少個三個數字均不相同的三位數，並求這些三位數的總和。

答： (a) 由於百位不可為零，

故三位數個數 $= 4\times5^2 = 100$

設所求的總和為 $100a+10b+c$，

由於百位不可為零，故 1, 2, 3, 4 均出現了 25 次，

即 a $= (1+2+3+4)\times25 = 250$

對於其餘兩位，每個數字出現的次數為 $4\times5 = 20$

故 $b=c = (0+1+2+3+4)\times20 = 200$

所求總和 $250\times100+200\times(10+1) = 27200$。

(b) 由於百位不可為零，

故三位數個數 $= 4\times P_2^4 = 4\times4\times3$

$= 48$。

設所求的總和為 $100a+10b+c$，

由於百位不可為零，故 1, 2, 3, 4 均出現了 12 次，

即 a $= (1+2+3+4)\times12 = 120$

對於其餘兩位，非零數字出現的次數為 $3\times3 = 9$

故 $b=c = (1+2+3+4)\times9 = 90$

所求總和 $120\times100+90\times(10+1) = 12990$。

（註：提示學生三位數與三位密碼的分別，即三位密碼首位可以為 0。）

8. (a) 已知 w, x, y, z 是正整數且滿足方程 $w+x+y+z=12$。若方程有 W 組不同的正整數解，求 W 的值。(HKMO 2005/06 初賽個人)

(b) 已知 w, x, y, z 是非負整數且滿足方程 $w+x+y+z=12$。若方程有 X 組不同的正整數解，求 X 的值。

答： (a) W $= H_4^{12-4} = C_{4-1}^{12-4+4-1} = C_3^{11}$

$= \dfrac{11\times10\times9}{3\times2\times1} = 165$

(b) 問題等同 $w'+x'+y'+z'=16$，其中 w', x', y', z' 是正整數。

X $= H_4^{12} = C_{4-1}^{12+4-1} = C_3^{15}$

$= \dfrac{15\times14\times13}{3\times2\times1} = 455$

9. 若 S 為 8 個人圍成圓形的排列數目，求 S 的值。
(HKMO 2010/11 決賽個人)

答： S $= R_8^8 = \dfrac{8!}{8} = 5040$。

10. (a) 若把英文字「DIFFERENCE」重新排列，問有多少種不同的方法？

(b) 從「DIFFERENCE」中任取三個英文字母，問有多少種不同的組合？

(c) 從「DIFFERENCE」中任取三個英文字母，排成新字，問有多少種不同的方法？

答： (a) 「DIFFERENCE」當中有 10 個英文字母，
其中「E」有三個，「F」有二個，
其餘的「C」、「D」、「I」、「N」、「R」字母各有一個。

所以排列方法數目 $= \dfrac{10!}{3!\times2!} = \dfrac{3628800}{6\times2}$

$= 302400$。

(b) 若三個字母全是相同，則有組合 1 個。
若三個字母中有兩個相同，則有組合 $2\times6 = 12$ 個。
若三個字母均不相同，則有組合 $C_3^7 = 35$ 個。
故共有組合 $1+12+35=48$ 個。

(c) 若三個字母全是相同，則有方法 1 個。
若三個字母中有兩個相同，則有方法 $2\times6\times\dfrac{3!}{2!} = 36$ 個。
若三個字母均不相同，則有組合 $P_3^7 = 210$ 個。
故共有組合 $1+36+210=247$ 個。

淺問

1. 若 $a+b+c+d=18$，求 a,b,c,d 的組合數目，若 a,b,c,d 為
(a) 四正整數。 (b) 四非負整數。

2. 設 0, 1, 2, 3, 4, 5 這六個數字組成的四個數字均不同的四位數數目為 N，它們的總和為 M，求 $N+M$ 的值。

3. 惠琪(女)和妍星(女)和另外十男四女中選擇四人任代表，求
(a) 惠琪和妍星均當選代表的選擇數目。
(b) 惠琪和妍星均落選代表的選擇數目。
(c) 二男二女任代表的選擇數目。

4. 若把下列英文字的字母重排，可以有多少種不同的排法？
(a) 「IXOHOXI」 (b) 「INDIVISIBILITIES」

5. 現把「IMOHKPRELIM」這 11 個英文字母分別寫在 11 張卡紙上（每張卡紙寫上一個字母）。若隨意抽出三張卡紙，所抽出的三個英文字母有多少個不同組合？（不考慮次序，例如「IMO」和「IOM」視為相同組合。）
(HKPSC 2011)

6. 有 4 本英文書、6 本中文書及 9 本日文書中任取兩本。已知這兩本書是相同語言的。若有 X 個不同的選擇，求 X 的值。 (HKMO 2006/07 初賽個人)

7. 在一個 5×5 的棋盤上，任意選取兩個不在同一橫行上方格。若 c 為選取的兩個不同方格的組合數目，求 c 的值。 (HKMO 2009/10 決賽個人)

8. 把含有 12 個元素的集合分成 6 個子集，使每個子集恰含有兩個元素，共有多少種分法？ (POLMO 1970)

9. 佑旻、建宏、錦輝和六名女同學站成一排，求
(a) 佑旻、建宏、錦輝必須站在一起的排列數目。
(b) 佑旻、建宏、錦輝互不相鄰站的排列數目。

10. 某家庭有婦二人和三子三女共八人圍圓桌而坐，求
(a) 任意而坐的坐法數目。
(b) 夫婦二人相鄰而坐的方法數目。
(c) 男女相隔的坐法數目。

詳答

1. (a) 組合數目 $= H_4^{18-4} = C_{4-1}^{18-4+4-1} = C_3^{17}$

$= \frac{17\times16\times15}{3\times2\times1} = 1330$

(b) 組合數目 $= H_4^{18} = C_{4-1}^{18+4-1} = C_3^{21}$

$= \frac{21\times20\times19}{3\times2\times1} = 680$

2. N $= 5\times P_3^5 = 5\times5\times4\times3 = 300$。

設 M $= 1000a+100b+10c+d$，

其 a,b,c,d 分別是千位、百位、十位和個位的數字總和。

由於千位不可以為 0，故每個數字均出現了 $\frac{300}{5}=60$ 次

即 a $= (1+2+3+4+5)\times60 = 15\times60$

$= 900$。

對於其他數位，0 出現的次數為 $P_3^5 = 5\times4\times3 = 60$，

另外 5 個數字出現的次數為 $\frac{300-60}{5} = 48$。

故 $b=c=d = (1+2+3+4+5)\times48+0\times60$

$= 15\times48 = 720$。

所以 M $= 720\times(100+10+1)+900\times1000$

$= 979920$

即 $M+N = 979920+300 = 980220$。

3. (a) 除了惠琪和妍星兩人，餘下的十四人爭奪兩個代表席位，故選擇數目為 $C_2^{14} = \frac{14\times13}{2\times1} = 91$。

(b) 把惠琪和妍星兩人視作不參選，十四人爭奪四個代表席位，故選擇數目為 $C_4^{14} = \frac{14\times13\times12\times11}{4\times3\times2\times1} = 1001$。

(c) 視作十名男生和六名女生分別爭奪兩個席位，故選擇數目為

$C_2^{10}\times C_2^6 = \frac{10\times9}{2\times1}\times\frac{6\times5}{2\times1} = 45\times15 = 675$。

4. (a) 「IXOHOXI」 共有 7 個字母，
當中「I」、「O」、「X」各 2，而「H」只有 1 個。
故排法數目 = $\dfrac{7!}{2!\times 2!\times 2!}$ = 630。
（註：「IXOHOXI」意指一些幻方，不單左右、上下鏡反或作旋轉後仍可看成一個幻方，見末頁。）

(b) 「INDIVISIBILITIES」 共有 16 個字母，
當中有 7 個「I」，2 個「S」，
「B」、「D」、「E」、「L」、「N」、「T」、「V」各 1。
故排法數目 = $\dfrac{16!}{7!\times 2!}$ = 2075673600。
（註：「INDIVISIBILITIES」中有七個「I」，此乃常用英文單詞中最多的。）

5. 總數有九種不同的字母，當中 I 和 M 出現兩次。
任取三個不同的字母的組合數目 = $C_3^9=\dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}=84$，
再加上兩個相同字母伴以別的八個字母之一，組合數目
= $2\times 8=16$
故符合要求的組合總數 = 84 + 16 = 100

6. X = $C_2^4+C_2^6+C_2^9$ = $\dfrac{4\times 3}{2}+\dfrac{6\times 5}{2}+\dfrac{9\times 8}{2}$ = 57

7. 選擇任意一格以後，共有八格在與其在同一橫行上，故餘下的只有 16 格可選，但當中每一組合數算二次。故組合數為 $\dfrac{25\times 16}{2}=200$。

8. 分法數 = $\dfrac{C_2^{12}\times C_2^{10}\times C_2^{8}\times C_2^{6}\times C_2^{4}\times C_2^{2}}{6!}$

$= \dfrac{(\frac{12\times 11}{2})(\frac{10\times 9}{2})(\frac{8\times 7}{2})(\frac{6\times 5}{2})(\frac{4\times 3}{2})(\frac{2\times 1}{2})}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}$

$= \dfrac{6\times 11\times 5\times 9\times 4\times 7\times 3\times 5\times 2\times 3\times 1\times 1}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}$

= $11\times 9\times 7\times 5\times 3$ = 10395

9. (a) 先把三名男生，即佑旻、建宏、錦輝視作一人。
故先把問題視作七人排列，排列數目為
$7! = 5040$，而三名男生之間的的排列數目又為 $3! = 6$。故總排列數目為 $5040\times6 = 30240$。
(b) 先讓六名女生排列，排列數目為 $6! = 720$，再讓三名男生填於女生隊的前後或兩女生之間共七個空位中，故男生排列數目為
$P_3^7 = 7\times6\times5 = 210$。
故總排列數目為 $720\times210 = 151200$。

10. (a) 坐法數目為 $\dfrac{P_8^8}{8} = \dfrac{8!}{8} = 7!$
$= 5040$。
(b) 把夫婦二人視作一人，但夫婦有左右之分，
故坐法數目為 $\dfrac{P_7^7}{7}\times2 = \dfrac{7!}{7}\times2 = 6!\times2$
$= 1440$
(c) 可先排男子，其坐法數目為 $\dfrac{4!}{4} = 3! = 6$，
再排女子，但這時位置固定，視如排直線，坐法數目 $4! = 24$，
故總坐法數目為 $6\times24 = 144$

I X O H O X I

1111	8818	8881	1188
8188	1881	1818	8111
1888	8181	8118	1811
8811	1118	1181	8888

I X O H O X I