「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

組合 － 概率與數算

摘要

1. 概率定義，基本運算如加、乘法則：
   (a) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
   (b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
2. 認識互補事件的概率計算。
   $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. 條件概率的計算。
   (a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
   (b) $P(A \mid B) \times P(B) = P(B \mid A) \times P(A)$

4. 基本幾何數算問題：

(a) 對角線相關問題：

凸 n 邊形的對角線數目為 $C_2^n - n$。

凸 n 邊形的邊及對角線所圍三角形數目

最多為 $C_3^n + 4C_4^n + 5C_5^n + C_6^n$。

邊長 $a \times b$ 長方形方格紙中，

所畫的對角線穿越方格數目為 $(a,b)\times[\frac{a}{(a,b)}+\frac{b}{(a,b)}-1]$。

(b) 矩形數目問題：

在 $n \times m$（$n \geq m$）的方陣中，

(i) 矩形數目為 $\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{m(m+1)}{2}$

(ii) 正方形數目為 $nm+(n-1)(m-1)+(n-2)(m-2)$
$+...+(n-m+1)\times 1$

(c) 路徑問題：

由 (0,0) 至 (m,n)，

只可向上或右移動的路徑數目為 C_n^{m+n}。

(d) 分割平面問題：

在一平面中，

(i) n 條直線最多可把平面分割成 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 的部分。

(ii) n 個圓最多可把平面分割成 n^2-n+2 的部分。

拾例

1. 從 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 及 12 的一組數字中取出兩數，試求該兩數之和為偶數的概率。(HKMO 1993/94 初賽個人)

答： 兩數之和為偶數，即兩數的奇偶性相同。

故所求的概率 $= \dfrac{C_2^5 + C_2^4}{C_2^9} = \dfrac{10+6}{36} = \dfrac{4}{9}$。

所以所需概率為 $\dfrac{4}{9}$。

2. 從 0 至 9 這 10 個數字中任意取三個數字組成一個沒有重覆數字的三位數，求這個數能被 9 整除的概率。

答： 由於百位不可為 0 ，

故可組成的三位數有 $P_3^{10} - P_2^9 = 10\times9\times8 - 9\times8 = 648$

三數字之和為 9 的倍數包括：

018, 027, 036, 045, 126, 135, 189, 234, 279, 369, 459, 468, 567 合十三個。

當中有四個包括零的，可組成三位數 $4\times4 = 16$

其餘的可組成三位數 $9\times6 = 54$

故所求的概率 $= \dfrac{16+54}{648} = \dfrac{35}{324}$。

3. 從區間 $[-6,4]$ 中獨立任意地抽取兩個實數，求它們的積大於 0 的概率。

答： 要求兩實數為同號，

即所求概率為 $\dfrac{6}{6+4}\times\dfrac{6}{6+4}+\dfrac{4}{6+4}\times\dfrac{4}{6+4}$

$= \dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5} = \dfrac{13}{25}$。

4. 從區間 $[-6,4]$ 中獨立任意地抽取兩個整數，求它們的積大於 0 的概率。

答： 要求兩整數為同號，

即所求概率為 $\dfrac{6}{6+4+1}\times\dfrac{6}{6+4+1}+\dfrac{4}{6+4+1}\times\dfrac{4}{6+4+1}$

$= \dfrac{6}{11}\times\dfrac{6}{11}+\dfrac{4}{11}\times\dfrac{4}{11} = \dfrac{52}{121}$。

5. (a) 問一個凸十邊形共有多少條對角線？

(b) 若一個凸十邊形當中沒有三條對角線共點，問以這凸十邊形的邊或對角線所圍成的三角形共有多少個？

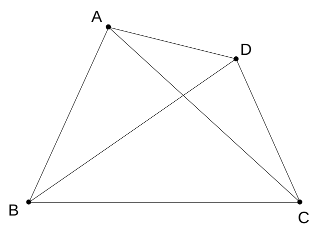
答： (a) 對角線數目 $= C_2^{10} - 10$

$= \dfrac{10\times 9}{2\times 1} - 10 = 35$。

(b) 首先考慮三角形三個頂點均為凸十邊形的頂點，

這樣的三角形有 $C_3^{10} = \dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}$

$= 120$ 個。



第二考慮三角形的

其中兩個頂點為凸十邊形的頂點，

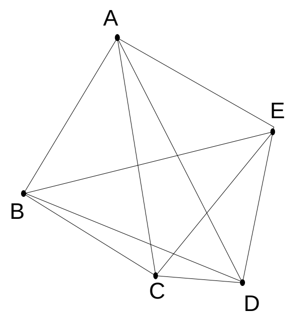
如右圖，A、B、C、D 為凸十邊形的四個頂點，

則任意四個頂點可組成四個這樣的三角形。

故三角形數目為 $4\times C_4^{10}$

$= 4\times\dfrac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1}$

$= 4\times 210 = 840$ 個。



第三考慮三角形的

其中一個頂點為凸十邊形的頂點，

如右圖，A、B、C、D、E 為凸十邊形的五個頂點，

則任意五個頂點可組成五個這樣的三角形。

故三角形數目為 $5\times C_5^{10}$

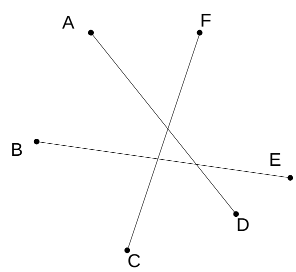
$= 5\times\dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}$

$= 5\times 252 = 1260$ 個。

最後考慮三角形的三角頂點也不是凸十邊形的頂點，

如右圖，A、B、C、D、E、F 為凸十邊形的六個頂點，

則任意六個頂點可組一個這樣的三角形。



故三角形數目為 C_6^{10}

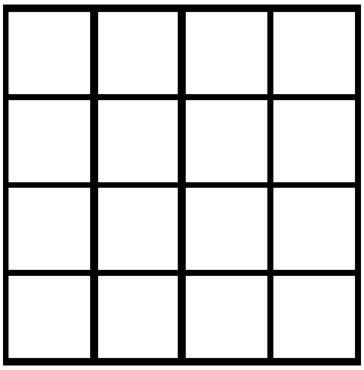
$= \dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}$

$= 210$ 個。

所以共有三角形 $120+840+1260+210$

$= 2430$ 個。

6. 一正方形的每邊被直線均分為四份，如右圖。求非正方形的長方形數目。
(HKMO 1992/93 初賽團體)



答： 長方形數目 $= (\frac{4\times5}{2})^2 = 100$

正方形數目 $= 1+4+9+16 = 30$

非正方形的長方形數目 $= 100-30$
$= 70$

7. (a) 在一平面上畫 6 條直線，最多可將平面分成幾個區域?

(b) 在一平面上畫 6 個圓，最多可將平面分成幾個區域?

答： (a) 區域數目 $= \frac{1}{2}(6^2+6+2)$
$= 22$。

(b) 區域數目 $= 6^2-6+2$
$= 32$。

8. 在方格紙上畫一個下列大小的長方形，問當中的對角線會穿越多少方格？

(a) 101×201

(b) 102×202

答： (a) 由於 (101, 201) = 1，
故對角線會穿越 $101+201-1 = 301$ 格。

(a) 由於 (102, 202) = 2，
故對角線會穿越 $2\times(51+101-1) = 302$ 格。

9. 在方格紙上畫一個大小為 7×11 的長方形，問對角線會穿越多少方格？

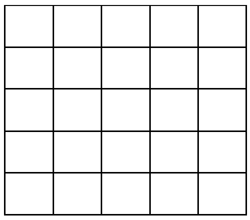
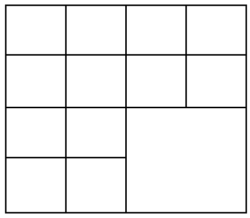
答： 由於 (11, 7) = 1，故對角線會穿越 $11+7-1 = 17$ 格。

10. 在坐標平面上，一隻螞蟻從 (0, 0) 前往 (5, 5)。若每步只能上移或右移一單位，則共有多少條不同的路線？

答： 所求路線數為為 $C_5^{5+5} = C_5^{10} = \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1}$
$= 252$。

淺問

1. 下列各圖中，每個方格均為正方形，數算圖有多少個矩形？多少個正方形？

(a)  (b) 

2. 從區間 $[-20,10]$ 中獨立任意地抽取兩個實數，求它們的積大於 0 的概率。（AMC 10 2011）

3. 從區間 $[-20,10]$ 中獨立任意地抽取兩個整數，求它們的積大於 0 的概率。

4. 有多少有序整數對 (x,y) 滿足下列各式
   (a) $x^2+y^2\le 10$　　(b) $x^2+2y^2\le 30$

5. 凸 n 邊形有 20 條對角線，求 n 。（HKMO 1988/89 決賽團體）

6. 在方格紙上畫一個下列大小的長方形，問當中的對角線會穿越多少方格？
   (a) 199×991　　(b) 399×993　　(c) 999×999

7. 有 n 條直線，最多可以把平面分成多少部分？
   (a) $n=3$　　(b) $n=5$　　(c) $n=10$

8. 有 n 個圓，最多可以把平面分成多少部分？
   (a) $n=4$　　(b) $n=7$　　(c) $n=10$

9. 在坐標平面上，一隻螞蟻從 (0, 0) 前往 (6, 6)。若每步只能上移或右移一單位，並且不能經過 (3, 3) ，則共有多少條不同的路線？
   （培正 2011 初賽中三）

10. 從 4、5、6、7、8、9、10、11 及 12 的一組數字中取出兩數，
   (a) 試求該兩數之和為偶數的概率。(HKMO 1993/94 初賽個人)
   (b) 試求該兩數之積為偶數的概率。

詳答

1. (a) 矩形數目 $= \dfrac{5\times(5+1)}{2}\times\dfrac{5\times(5+1)}{2} = 15\times15$

$= 225$

正方形數目 $= 1+4+9+16+25 = 55$

(b) 矩形數目 $= \dfrac{4\times(4+1)}{2}\times\dfrac{4\times(4+1)}{2}-4\times5$

$= 10\times10-20 = 80$

正方形數目 $= 1+4+9+16-4-3-3$

$= 20$

2. 要求兩實數為同號，即所求概率為 $\dfrac{10}{10+20}\times\dfrac{10}{10+20}+\dfrac{20}{10+20}\times\dfrac{20}{10+20}$

$= \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{9}$。

3. 要求兩整數為同號，即所求概率為 $\dfrac{10}{31}\times\dfrac{10}{31}+\dfrac{20}{31}\times\dfrac{20}{31} = \dfrac{500}{961}$

4. (a) 先考慮正整數對：

$(x,y) = (1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)$

由於 x,y 均可取正或負，故這裡共有 $6\times 4=24$ 個數對。

再考慮 $x=0, y\neq 0$ 的數對：

$(x,y) = (0,1),(0,2),(0,3)$

由於 y 可取正或負，再加上 x,y 易位，

故這裡共有 $3\times 4=12$ 個數對。

連同 $(x,y)=(0,0)$，所以合共有 $24+12+1=37$ 數對。

(b) 先考慮正整數對：

$(x,y) = (1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)$

由於 x,y 均可取正或負，故這裡共有 $12\times 4=48$ 個數對。

再考慮 $x=0, y\neq 0$ 的數對：

$(x,y) = (0,1),(0,2),(0,3)$

由於 y 可取正或負，故這裡共有 $3\times 2=6$ 個數對。

再考慮 $x\neq 0, y=0$ 的數對：

$(x,y) = (1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,0)$

由於 x 可取正或負，故這裡共有 $5\times 2=10$ 個數對。

連同 $(x,y)=(0,0)$，所以合共有 $48+5+10+1=64$ 數對。

5. $$C_2^n - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = 20$$

$$n^2 - n - 2n = 40$$

$$n^2 - 3n - 40 = 0$$

$$(n-8)(n+5) = 0$$

$n=8$ 或 $n=-5$（捨去）

6. (a) 由於（199, 991）= 1，

故對角線會穿越 $199+991-1 = 1189$ 格。

(b) 由於（399, 993）= 3，

故對角線會穿越 $3\times(133+331-1) = 1389$ 格。

(c) 由於（999, 999）= 999，

故對角線會穿越 $999\times(1+1-1) = 999$ 格。

7. (a) 第 1 條直線最多把平面分成 2 個部分，
第 2 條直線最多把平面分成 4 個部分，
第 3 條直線最多與前兩條直線有兩個交點，而這兩個交點可把直線分成 3 段，這 3 段把原有區域一分為二，所以新增了 3 個區域。
故 3 條直線最多可以分出 7 個部分。

(b) 部分數目 = $2+2+3+4+5$ = 16

(c) n 條直線可最多可以分出的部分數目

$$= 2+2+3+4+\ldots+n$$

$$= 1+(1+2+3+4+\ldots+n)$$

$$= 1+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

現在取 $n=10$，

故部分數目 $= \frac{1}{2}(10^2+10+2) = 56$。

8. (a) 第 1 個圓最多把平面分成 2 個部分，
第 2 個圓最多把平面分成 4 個部分，
第 3 個圓最多把平面分成 8 個部分，
第 4 個圓最多與前兩個圓有 6 個交點，而這 6 個交點可把圓分成 6 段圓弧。這 6 段圓弧把原區域一分為二，所以新增了 6 個區域。
故 4 個圓最多可以分出 14 個部分。

(b) 部分數目 = $2+2+4+6+8+10+12$ = 44

(c) n 個圓最多可以分出的部分數目

$$= 2+2+4+6+\ldots+2(n-1)$$

$$= 2+2(1+2+3+4+\ldots+n-1)$$

$$= 2+2\times\frac{(n-1)(n)}{2} = n^2-n+2$$

現在取 $n=10$，

故部分數目 $= 10^2-10+2 = 92$。

9. 一隻螞蟻從（0, 0）前往（6, 6）的路線總數為 $C_6^{6+6} = C_6^{12}$。
一隻螞蟻從（0, 0）前往（3, 3）的路線總數為 $C_3^{3+3} = C_3^{6}$。
一隻螞蟻從（3, 3）前往（6, 6）的路線總數為 $C_3^{3+3} = C_3^{6}$。
故總路線數為 $C_6^{12} - C_3^6 \times C_3^6 = 924 - 20 \times 20 = 524$

10. (a) 兩數之和為偶數，即兩數同為偶或兩數同為奇。

$$所求概率 = \frac{C_2^5 + C_2^4}{C_2^9} = \frac{\frac{5\times4}{2\times1} + \frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{9\times8}{2\times1}} = \frac{10+6}{36} = \frac{4}{9}$$

(b) 兩數之積為偶數，即其中一數為偶數，即排除兩數為奇數的情況。

$$所求概率 = 1 - \frac{C_2^4}{C_2^9} = 1 - \frac{4\times3}{2\times1} \times \frac{2\times1}{9\times8} = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$$

萬物莫逃乎數，是數也，先天地而已存，後天地而已立。蓋一而二，二而一者也。

中國數學家

楊輝（約 1238-約 1298）