「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

組合 － 文字謎題與賽程問題

摘要

1. 解決文字謎題。
2. 認識不同的賽制：
   如淘汰制、單循環、瑞士制等的比賽過程、得分關係變化。
3. 運用同餘法編製單循環賽程。
4. 解決答題得分變化的組合問題。

拾例

1.　解文字謎題 $\overline{I}+\overline{M}=\overline{ME}$ 。

答：　由於進位的原由，故 $\overline{M}=1$，從而得 $\overline{I}=9, \overline{E}=0$ 。

2.　若 $2790=\overline{JO}\times\overline{HN}=\overline{PA}\times\overline{UL}$，求 $\overline{JOHN}+\overline{PAUL}$ 的最大值。

答：　由於 2790 = $2\times3^3\times5\times31$，

即 2790 可分解成 45×62、 31×90、30×93 。

其中只有 45×62 和 31×90 使用的八個數字均不相同。

故最大值為 $6245+9031$ = 15276。

3.　解文字謎題 $\overline{GO}\times\overline{GO}=\overline{PIG}$ 。

答：　由於 $32^2=1024>1000$，故 $\overline{GO}\le31$ 。

再者完全平方數的個位只可為 0, 1, 4, 5, 6, 9。

但 $\overline{G}\neq0,5,6$，因為這樣 $\overline{G}=\overline{O}$ 。

綜合， $\overline{G}=1$，從而得 $\overline{O}=9$ 。

$19^2=361$，所以 $\overline{G}=1, \overline{O}=9, \overline{P}=3, \overline{I}=6$ 。

4. 下列算式中，每個漢字代表一個數字，不同漢字代表不同數字。寫出「教我如何不想她」代表的數字。

							她
						想	她
					不	想	她
				何	不	想	她
			如	何	不	想	她
		我	如	何	不	想	她
+)	教	我	如	何	不	想	她
	何	何	何	何	何	何	何

答： 顯然 何 = 教 + 1。「教、我、如、何、不、想、她」七數也不是 0。
「她」不是 5，否則「何」也是 5。
設「她」 = 1，則「何」 = 7。得 6 ×「想」= 7，不可能。
其實「她」不可以為奇數，因這樣會引致「想」式奇偶性不同。
設「她」 = 2，則「何」 = 4，進一。
得 6 ×「想」+ 1 = 4 ，左右奇偶性不同，不可能。
設「她」 = 4，則「何」 = 8，進二。
得 6 ×「想」+ 2 = 8 ，「想」= 1 或「想」= 6 進三。
無論「想」值若何，也無法計出「不」。
設「她」 = 6，則「何」 = 2，進四。
得 6 ×「想」+ 4 = 2 ，「想」= 3 進二或「想」= 8 進五。
若「想」= 3 進二，
則 5 ×「不」+ 2 = 2，「不」為偶數，餘下 4, 8 可用。
若「不」= 4，則進二，
4 ×「何」+ 2 = 「何」，與「何」= 2 矛盾。
若「不」= 8，則進四，
4 ×「何」+ 4 = 「何」，與「何」= 2 沒有矛盾。
3 ×「如」+ 1 = 2，與「如」= 7 進二。
2 ×「我」+ 2 = 2，與「我」=5 進一。
最後「教」= 1。
故「教我如何不想她」代表「1572836」。

5. 一個籃球員在比賽中射中了五球，每球得分兩分或三分。問他所得的總分共有多少種可能？ (AMC 10 2008)

答： 該籃球員可能射中 0 至 5 球三分球，故共有 6 種不同的得分可能。

6. 一次數學測驗共有十題問題，答對得 2 分，答錯或不答皆扣一分。若得負分者皆視作零分，問得分共有多少個不同的值？

答： 請答對題數為 a。若得負分，即

$$2a+(10-a)(-1) < 0$$
$$3a < 10$$
$$a < \frac{10}{3}$$

所以答對 0 題、1 題至 3 題，皆得零分。

答對 4 題至 10 題，得分各不同，故共有 7+1=8 個不同的可能得分。

7. 某圍棋比賽，邀請了二十隊球隊出賽，決定三甲。

(a) 若比賽以淘汰賽進行，問該比賽共有多少場比賽？

(b) 若比賽以單循環賽進行，問該比賽共有多少場比賽？

(c) 若比賽以七輪瑞士制進行，問該比賽共有多少場比賽？

答： (a) 連同季軍賽，場數 $= 20-1+1 = 20$。

(b) 場數 $= C_2^{20} = \frac{20\times 19}{2} = 190$。

(c) 場數 $= 7\times\frac{20}{2} = 7\times 10 = 70$。

8. 某地足球聯賽，各隊間以單循環賽制互相作賽，每場比賽勝者得二分，和者各得一分，負者得零分。現甲隊以 8 分奪冠，乙隊一分之差屈居亞軍，丙、丁兩隊同得 4 分，分列三、四。現問該地聯共有多少隊參加？

答： 已知四隊共得 $8+7+4+4=23$ 分。即最少比賽了 12 場。

從而可知最少有 6 隊參加。

但另一方面，若比賽隊伍有 7 隊或以上，

總得分 $\geq C_2^7\times 2 = \frac{7\times 6}{2\times 1}\times 2 = 42$。

每隊平均得分 $\geq \frac{42}{7} = 6$。

已知四隊平均得分小於 6 ，與之矛盾。

故共有 6 隊參賽。

6 隊的總得分為 $C_2^6\times 2 = \frac{6\times 5}{2\times 1}\times 2 = 30$。

即另外兩隊共得 7 分：一隊 4 分、一隊 3 分。

9.　　試以同餘法編製五隊球隊的單循環賽程。

答：　以 1 至 5 表示該五隊， X 表示該隊輪空。

於是在第 k 輪，i, j 兩隊作賽，$i + j \equiv k(\bmod 5)$，

其中 $k = 1,2,3,4,5$。

	1	2	3	4	5
第一輪	5	4	X	2	1
第二輪	X	5	4	3	2
第三輪	2	1	5	X	3
第四輪	3	X	1	5	4
第五輪	4	3	2	1	X

10.　　試以同餘法編製六隊球隊的單循環賽程。

答：　以 1 至 5 表示該五隊， X 表示該隊輪空。

於是在第 k 輪，i, j 兩隊作賽，$i + j \equiv k(\bmod 5)$，

其中 $k = 1,2,3,4,5$。

再把所有輪空球隊編作與第六隊作賽。

	1	2	3	4	5	6
第一輪	5	4	6	2	1	3
第二輪	6	5	4	3	2	1
第三輪	2	1	5	6	3	4
第四輪	3	6	1	5	4	2
第五輪	4	3	2	1	6	5

「動手做」是「理解」的最佳方法。

德國哲學家

康德

(Emmanuel Kant 1724-1804)

淺問

1. 解下列文字謎題：

(a)
$$\begin{array}{rccccc} & F & O & R & T & Y \\ & & & T & E & N \\ + & & & T & E & N \\ \hline & S & I & X & T & Y \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcccccccc} & F & O & U & R & T & E & E & N \\ & & & & & S & E & V & E & N \\ & & & & & & T & E & N \\ + & & & & & & T & E & N \\ \hline & F & O & R & T & Y & O & N & E \end{array}$$

（註： 以上每個字母代表一個數字，每個英文字領頭的字母不可為零。）

2. 在下列方程中，每個字母代表在一進制中一個不同的數字，
$\overline{YE}\times\overline{ME}=\overline{TTT}$，在左面的乘積中，$\overline{YE}$ 比 $\overline{ME}$ 小。那麼，求
$E+M+T+Y$ 的值。（AHSME 1973）

3. 在下列乘法中，$\Theta\Theta\Theta\times\Theta\Theta=\Theta\Theta\times\Theta\Theta=5568$，每一個圓圈代表一個由 1 至 9 的一個整數。若以上九個圓圈代表的九個整數都不同，求 $\Theta\Theta\Theta$ 代表的整數。（HKMO 1990/91 初賽團體）

4. 某數學比賽共有四條題目。以下述方式為每題評分：答對得 2 分、答錯扣 1 分、不作答得零分。若至少有 S 名參賽者才可保證有三人同分，求 S 的值。（HKMO 2006/07 決賽團體）

5. 有 50 人參加象棋比賽，若賽事以下列賽制進行，求舉行的多比賽的場數？
(a) 單淘汰賽　　(b) 單循環賽　　(c) 十輪瑞士制

6. 甲乙兩隊各出 7 名隊員按事先排好的順序出場參加圍棋擂台賽。雙方先由 1 號隊員比賽，負者被淘汰，勝者再與負方 2 號隊員比賽，…，直到有一方隊員全被淘汰為止，另一方獲勝，形成一種比賽過程。那麼所有可能出現的比賽過程的種數有多少？

7. 試以同餘法編製八隊球隊和九隊球隊的單循環賽程。

8. 象棋比賽中，每兩名選手之間都恰好比賽一局，勝者得 1 分，負者得 0 分，平局時各得 0.5 分。比賽結束後發現，每位選手所得的分數中恰好有一半是他同 10 名得分最低的選手的對局中得到的（10 名得分最低的選手所得的分數的一半是他們彼此對局中得到的），求參加比賽的選手總數。（AIME 1985）

詳答

1. (a) 由 $Y+2N\equiv Y(\text{mod}10)$，得 $N=0$ 或 $N=5$。
若 $N=5$，$T+2E+1\equiv T(\text{mod}10)$，左右兩邊奇偶性不同。
所以 $N=0$。
同理 $T+2E\equiv T(\text{mod}10)$，得 $E=5$。
另有 $F+1=S$ 及 $O+1$ 或 $O+2=I+10$。
若為 $O+1=I+10$，則 $O=9, I=0$，這與 $N=0$ 產生矛盾。
故 $O+2=I+10$，得 $O=9, I=1$。
$R+2T+1=X+20$，由此得 $(R,T)=$ (4, 8)、(6, 7)、(6, 8)、(7, 6)、(7, 8)、(8, 6)、(8, 7)
對應的 X 值為 1、1、3、0、4、1、3。
顯然 X 不可為 0 或 1 ，但若 X 為 3 便找不到合條件的 F, S。
所以 $X=4$，對應 $R=7, T=8$。由此得 $F=2, S=3$。
最後 $Y=6$。
總結：$N=0, I=1, F=2, S=3, X=4, E=5, Y=6, R=7, T=8, O=9$。

(b) 由 $4N\equiv E(\text{mod}10)$ 及 $4E\equiv N(\text{mod}10)$，
即 $16N\equiv N(\text{mod}10)$，得 $6N\equiv N(\text{mod}10)$，
解得 N = 0, 2, 4, 6, 8。但 N 不可為 0，否則 E 亦為 0。
除 $N=2$ 外，其他的可能性亦有進位的問題。
所以 $N=2$，得 $E=8$。
再觀察得 $T=0$ 及 $R+S=10$，$U+1=R$。
再者有 $E+V+2T+3\equiv O(\text{mod}10)$， $V+11=O+10$，$V+1=O$。
於是 $E+1=Y$，即 $Y=9$。
於是有 $R=7, S=3, U=6$，得 $V=4, O=5$。最後得 $F=1$。
總結：$T=0, F=1, N=2, S=3, V=4, O=5, U=6, R=7, E=8, Y=9$。

2. 由於 $\overline{TTT}=T\times3\times37$，又由於 $\overline{ME}>\overline{YE}$，所以 $\overline{ME}$ 為 37 的倍數。
由於 $\overline{ME}$ 是兩位數，所以 $\overline{ME}$ 只可為 37 或 74。
若 $\overline{ME}=74$，取 $\overline{YE}$ 的最小值為 14，則 $\overline{YE}\times\overline{ME}=14\times74=1036>999$。
所以 $\overline{ME}=37$。而 $\overline{YE}$ 為 3 的倍數，取最小值 27。
$\overline{YE}\times\overline{ME}=27\times37=999$。即 $E+M+T+Y=7+3+9+2=21$。

3. $5568 = 2^6 \times 3 \times 29$，再把 5568 分解成一兩位數乘兩位數或三位數的結果：

$$5568 = 12\times464 = 16\times348 = 24\times232 = 29\times192 = 32\times174 = 48\times116 = 58\times96 = 64\times87$$

剔除一些本身出現重覆數字的組合，留下：

$$5568 = 16\times348 = 32\times174$$

及 $$5568 = 58\times96 = 64\times87$$

由於兩個乘以三位數的算式中均出現了 3 和 6，故捨去 64×87，即保留 58×96 及 32×174。故該三位數是 174。

4. 分析各可能的總分值：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
對	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
空	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
錯	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
總	8	6	5	4	3	2	2	1	0	−1	0	−1	−2	-3	−4

即所有學生只可能得： 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3, −4 共十二種值。若只有 24 名參賽者，可使每種得分各有兩名參賽者，不合題意。但若有 25 名參賽者，則可保證有三人同分。

5. (a) 單淘汰賽每場淘汰一名棋手，故得舉行 $50-1=49$ 場。

(b) 單循環賽中每兩名棋手間均作賽，

故總場數 $= C_2^{50} = \dfrac{50\times49}{2} = 1225$ 場。

(c) 一輪瑞士制比賽得賽 $\dfrac{50}{2}=25$ 場。故十輪共賽 $25\times10=250$ 場。

6. 考慮負隊勝 0 盤、1 盤，…，6 盤。

若負隊勝 0 盤，比賽過程只有一種；

若負隊勝 1 盤，即合共有八盤比賽，除最末一盤外，其中一盤為負隊勝，故種數為 $C_1^7=7$；

若負隊勝 2 盤，即合共有九盤比賽，除最末一盤外，其中二盤為負隊勝，故種數為 $C_2^8=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$；

如此類推，故總種數為 $2(1+C_1^7+C_2^8+...+C_6^{12})=3432$。

7.　以 1 至 7 和 X 表示該八隊。把第八隊 (X) 抽起，再看哪隊輪空。

於是在第 k 輪，i, j 兩隊作賽，$i + j \equiv k \pmod 7$，其中 $k = 1,2,3,\ldots 7$。

	1	2	3	4	5	6	7	X
一	7	6	5	X	3	2	1	4
二	X	7	6	5	4	3	2	1
三	2	1	7	6	X	4	3	5
四	3	X	1	7	6	5	4	2
五	4	3	2	1	7	X	5	6
六	5	4	X	2	1	7	6	3
七	6	5	4	3	2	1	X	7

以 1 至 9 表示該九隊，X 表示該隊輪空。

於是在第 k 輪，i, j 兩隊作賽，$i + j \equiv k \pmod 9$，其中 $k = 1,2,3,..,9$。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
一	9	8	7	6	X	4	3	2	1
二	X	9	8	7	6	5	4	3	2
三	2	1	9	8	7	X	5	4	3
四	3	X	1	9	8	7	6	5	4
五	4	3	2	1	9	8	X	6	5
六	5	4	X	2	1	9	8	7	6
七	6	5	4	3	2	1	9	X	7
八	7	6	5	X	3	2	1	9	8
九	8	7	6	5	4	3	2	1	X

8. 設共有 n 名選手參加比賽。

我們把 10 名得分最低的選手稱為「敗者」，

其餘的 $n-10$ 名選手稱為「勝者」。

n 名選手的得分總和為 $C_2^n \times 1 = \frac{1}{2}n(n-1)$

10 名「敗者」之間的得分總和為 $C_2^{10} \times 1 = 45$

「勝者」之間的得分總和為 $C_2^{n-10} \times 1 = \frac{1}{2}(n-10)(n-11)$

由於「勝者」之間的得分總和亦佔他們總得分的一半，

所以

$$\frac{1}{2}n(n-1) = 90+(n-10)(n-11)$$
$$n^2-n = 180+2n^2-42n+220$$
$$n^2-41n+400 = 0$$

解得 $n=16$ 或 $n=25$。

若 $n=16$，10 名「敗者」之間的平均得分為 9 ，

6 名「勝者」之間的平均得分為 5，不合理。

故得解共有選手 25 人。

每當理智缺乏可靠的論證思路時，類比這個方法往往指引我們前進。

德國哲學家

康德

(Emmanuel Kant 1724-1804)