「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

組合 － 圖論淺介

摘要

1. 運用圖論中對點、連線、簡單圖等的定義。
2. 認識三角形及完全圖 K_n 的定義：
   (a) 完全圖 K_n 為 n 點圖中任兩點間也有連線，
   即共有線 $C_2^n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 條，度數總和為 $n(n-1)$。
   (b) 二部圖 $K_{n,n}$ 為 2n 點圖，2n 點平分成兩組，同組點沒有連線，不同組點有連線，
   即共有線 n^2 條，度數總和為 $2n^2$。
   (c) 三角形即三點中任兩點間也有連線。
   (i) 對於 $2n$ 簡單圖中，
   $K_{n,n}$ 為最多連線而不存有三角形的圖。
   當中連線有 n^2 條。
   (ii) 對於 $2n+1$ 簡單圖中，
   $K_{n,n+1}$ 為最多連線而不存有三角形的圖。
   當中連線有 $n(n+1)$ 條。
3. 認識及運用反圖，
   即對某圖的有連線的地方變成沒連線，沒連線的地方變成有連線。
4. 點的度數的定義，即有多少連線接連某點：
   (a) 簡單圖中所有點的度數總和必為連線數的兩倍，故必為偶數。
   (b) 簡單圖中任一點的最大度數為該圖點數減一。
5. 循環及一筆畫的條件：
   (a) 簡單圖的每一點的度數均為正偶數。或
   (b) 簡單圖中除兩點的度數為奇數外，
   其餘每一點的度數均為正偶數。
6. 淺介哈密爾頓 (Hamilton) 路徑：
   自一多面體頂點開始，沿邊而行，沒重覆地經過所有頂點回到原來起步的頂點。

拾例

1. 問下列度數集為何不存在？
   (a) $\{0,1,2,3\}$
   (b) $\{0,1,2,3,4,5\}$

答： (a) 度數為 0 的點和度數為 3 的點不可並存。
(b) 度數總和為奇數。

2. 以例子介紹一筆畫，可以高斯七橋問題作引。

3. 問圖 K_3 有多少條邊？

答： 邊數 = 3×2 = 6。

4. 問圖 $K_{4,4}$ 有多少條邊？

答： 邊數 = 4×4 = 16。

5. 某單圖有 20 點，問最多可作多少條連線使圖中沒有三角形，即不存在三點當中每兩點均有連線。

答： 把 20 點分成兩個點集 S, T，每個點集各有 10 點。
在 S 中任何一點向 T 中任何一點作連線，共作連線 $10^2=100$ 條。
此圖不存在任何三角形，
因為任意選擇三點，必有兩點在同一集合，即該兩點間沒有連線。
但若多加一連線必然是同一集合的兩點 a,b，
不失一般性，設 $a,b\in S$。
若我們選擇 a,b 及點集 T 中的一點，便有三角形。
所以最小連線數為 100。

6. 簡單圖 G 有 20 頂點，40 條邊，且每點度數均為 3、4 或 5。若當中只有 14 點為四度點，問有三度點多少點？

答： 由於邊數為 40，故總度數為 $40\times 2=80$。
減去當中的 14 點四度點，即其餘 6 點的度數總和為 $80-4\times 14=24$。
設有三度點 x 點，則得

$$
\begin{aligned}
3x+5(6-x) &= 24\\
3x+30-5x &= 24\\
2x &= 6\\
x &= 3
\end{aligned}
$$

故共有三度點 3 點。

7. 十人參加一個會議，會議前某些人和另一些人握過手，每兩個人間最多握手一次。問會否使沒有兩個人握手的次數相同？

答： 不會。

作一十點圖，每一點代表一位參加會議的人，若兩人握過手，則連上一邊。

這樣點的最大度數為 9，最小度數為 0。

但度數為 9 和度數為 0 的點不可並存。

故最多有 9 個不同的值可取，不可能令十點的度數不同。

即不可使十人的握手次數各個不同。

8. 國際乒乓球男女混合雙打大獎賽有 24 對選手參加，賽前一些選手握了手，但同一對選手之間不握手。賽後某個男選手問每個選手的握手次數，各人的回答各不相同。問這名男選手的女搭檔和多少人握了手？

答： 48 名選手用 48 個頂點 $v, v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{46}$ 表示，

其中 v 代表發問的男選手。

兩人握過手就在他們相應的頂點連上一條邊，得圖 G_1。

在 G_1 中，除 v 點外，每點的度數互不相同。

但 $d(v_i) \le 46$，其中 $i = 0,1,2,\ldots,46$。

即這 47 點的度數分別為 0, 1, 2, …, 46。

不失一般性，設 $d(v_i) = i$，其中 $i = 0,1,2,\ldots,46$。

對頂點 v_{46} 而言，唯一不相鄰的點是 v_0，即 v_{46}, v_0 對應的選手為一組。

於是我們把這兩點和連上這兩點的邊都去掉，得圖 G_2。

在 G_2 中，除 v 點外，每點的度數仍互不相同，只是比之前的減少了 1。

於是對頂點 v_{45} 而言，

唯一不相鄰的點是 v_1，即 v_{45}, v_1 對應的選手為一組。

於是我們把這兩點和連上這兩點的邊都去掉，得圖 G_3。如此類推。

最後餘下 v, v_{23} 兩點，即這名男選手的女搭檔共和 23 人握了手。

9. 證明把 K_6 各邊染上紅或藍色，必然存在同色的 K_3。

答： 固定其中一點 A，分析連上 A 各邊的顏色，

當中必有三點與 A 的連線為同色，如紅色。

再分析此三點間連線的顏色，

若有兩點間的連線為紅色，則此兩點與 A 所組成的子圖為紅色的 K_3。

若沒有兩點間的連線為紅色，則此三點組成的子圖為藍色的 K_3。

（註：淺介染色問題。進一步提及所用顏色 = 最大度數 或 最大度數 + 1。）

10. 以立方體或正四面體解釋哈密爾頓路徑。

淺問

1. 求下列圖各點的度數總和。

   (a) K_5　　(b) $K_{3,3}$　　(c) $K_{4,4,4}$

2. 試判斷下列點的度數集合對應的簡單圖是否存在。若否，請給理由。

   (a) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$　　(b) $\{1,1,2,2,3,3,4,4\}$　　(c) $\{4,4,4,5,5,5\}$

3. 試把下列各圖繪作平面圖。

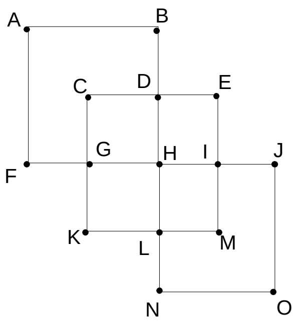
   (a) K_4　　(b) $K_{2,2,2}$　　(c) $\{1,2,2,3,4\}$

4. 試判斷下列點的度數集合對應的簡單圖是否可作一筆畫。若否，請問最少需作多少條新線使之可作一筆畫。

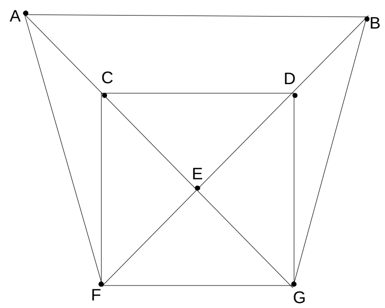
   (a) $\{1,2,3,4,4\}$　　(b) $\{2,2,3,3,4,4,5,5\}$　　(c) $\{4,4,4,4,4,4\}$

5. 試判斷下列簡單圖可否作一筆畫，若可，試畫之。

   (a)



   (b)



6. 求最小的 n 值使 $n \geq 10$ 及完全圖 K_n 可作一筆畫。

7. 求最小的 n 值使 $n \geq 10$ 及二部圖 $K_{n,n}$ 可作一筆畫。

8. 某簡單圖有 100 點，問最多可作多少條連線使圖中沒有三角形，即不存在任何三點兩兩連線。

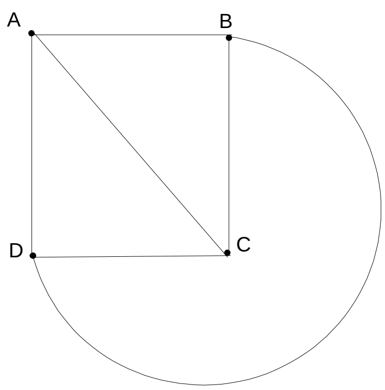
9. 某國家有四座城市 A, B, C, D，當中沒有三個城市在同一直線上。現政府計劃興建三道高速公路接連四個城市，每道高速公路只可接連其中兩個城市，問政府有多少種不同的興建方案？

詳答

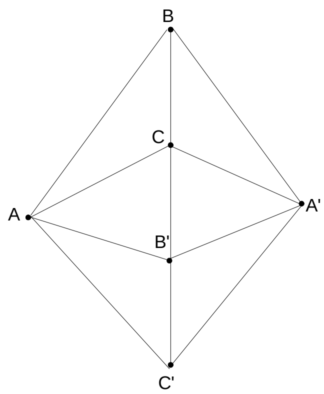
1.	(a)	度數總和	=	$5\times(5-1)$	=	20
	(b)	度數總和	=	$2\times3\times3$	=	18
	(c)	度數總和	=	$3\times4\times(4+4)$	=	96

2. (a) {0,1,2,3,4,5,6} 對應的簡單圖不存在，
因為若在 7 點中某點的度數為 6，即該點與其餘所有點有連線，
則不可以存在有點的度數為 0。
(b) {1,1,2,2,3,3,4,4} 對應的簡單圖存在。
(c) {4,4,4,5,5,5} 對應的簡單圖不存在。
因為點的度數總和為奇數。
度數總和等同連線數的 2 倍，故不可以為奇數。

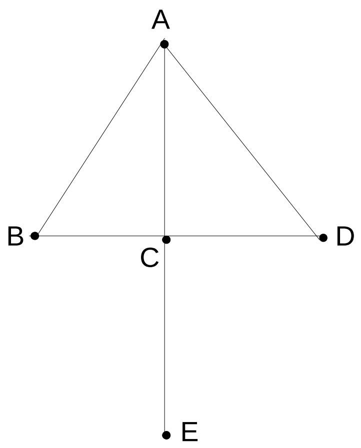
3. (a)



(b)



(c)



4.　(a)　{1,2,3,4,4} 對應的簡單圖不存在。
因為在五點圖中，若有 2 點度數為 4，則不可能有點度數為 1。
由於對應的簡單圖不存在，所以不可以加線使之成為一筆畫。
(b)　{2,2,3,3,4,4,5,5} 對應的簡單圖不可作一筆畫。
因為奇度數點只有 4 點。
需多加一條新線，連結其中兩點奇度數點，才可成一筆畫。
(c)　{4,4,4,4,4,4} 對應的單圖可作一筆畫。因為奇度數點只有 0 點。

5.　(a)　可以作一筆畫，因為所有點的度數皆為偶數。
一筆畫法　A => B => D => C => G => K => L => M => I =>
E => D => H => L => N => O => J => I => H =>
F => A
(b)　可以作一筆畫，因為只有 A, B 兩點的度數為奇數，其餘各點的度數皆為偶數。
一筆畫法　A => B => G => F => E => D => C => A => F =>
C => E => G => D => B

6.　K_n 圖中每點的度數為 $n-1$，令 $n-1$ 為偶數，即 n 為奇數。
所以所有 K_n 圖，其中 n 為奇數，均可一筆畫。
即所求 n 的最小值為 11。

7.　$K_{n,n}$ 圖中每點的度數為 n，令 n 為偶數。
所以所有 $K_{n,n}$ 圖，其中 n 為偶數，均可一筆畫。
即所求 n 的最小值為 10。

8. 顯然除 P_1 外，其餘 9 點間都有連線的 K_9 圖符合要求。
K_9 圖有直線 $C_2^9=\dfrac{9\times 8}{2\times 1}=36$ 條，即 m 的最小值必不大於 36。
若我們抽走 P_2,P_3 間的連線，
這樣選取 P_1,P_2,P_3 和其它點中任何一點，
這四點中便找不到三角形。由此 m 的最小值為 36。

9. 作二部圖 $K_{50,50}$，
即把 100 點分成兩個點集 S, T，每個點集各有 50 點。
在 S 中任何一點向 T 中任何一點作連線，
共作連線 $50^2=250$ 條。
此圖不存在任何三角形，
因為任意選擇三點，必有兩點在同一集合，即該兩點間沒有連線。
但若多加一連線必然是同一集合的兩點 a,b，
不失一般性，設 $a,b\in S$。
若我們選擇 a,b 及點集 T 中的一點，便有三角形。
所以最多連線數為 2500。

10. 由於四個城當中有 $C_2^4=6$ 道可建的高速公路。
政府只建三道，故有 $C_3^6=20$ 個不同的建路方案。
但當中有四個方案，三道高速公路組成一個「三角形」，
即有一個城市不能接連其餘三個城市，這方案不符合要求。
所以符合要求的方案數只有 $20-4=16$ 個。
（註： 一個 n 點簡單圖以 $n-1$ 條連線把所有點接連，圖論中稱為「樹」。）

瞭解數學，才知道數學如此美。

中國數學家
丘成桐
(1949 -)