「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

組合 – 建構幻方

摘要

1. 介紹拉丁方、正交拉丁方。說明如何從兩個正交拉丁方建立半幻方。
2. 認識幻方、半幻方定義。幻和計算。

$$\text{幻和} = \frac{1}{2n}(n^2)(n^2+1) = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

3. 介紹如何建立奇階幻方，如暹邏法、梯階法等。
4. 介紹如何建立偶偶階幻方，即 4n 階幻方，如對角線法、旋轉法等。
5. 介紹如何建立奇偶階幻方，即 4n+2 階幻方，如 LUX 法。
6. 介紹使用分解法建立高階幻方。
7. 介紹使擴階法建立同心幻方。
8. 淺介冪和幻方，平方幻和及立幻和計算。

(a)　平方幻和

$$= \frac{1}{6n}(n^2)(n^2+1)(2n^2+1)$$

$$= \frac{n(n^2+1)(2n^2+1)}{6}$$

(b)　立方幻和

$$= \frac{1}{4n}(n^2)^2(n^2+1)^2 = \frac{n^3(n^2+1)^2}{4}$$

9. 介紹馬步幻方、素幻方、古爾真（Kurchen）方、鏡反幻方等。

拾例

1.　試作一個四階拉丁方。

答：

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

（註：淺談正交拉丁方的定義。）

2.　試求一個二十階的平方幻方的幻和與平方幻和。

答：　幻和　=　$\frac{1}{2}(20^2)(20^2+1)\div 20$　=　4010。

平方幻和　=　$\frac{1}{6}(20^2)(20^2+1)(2\times 20^2+1)\div 20$　=　1070670。

3,　試以暹邏法建立 5 階幻方。

答：

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

4.　試以梯階法作 5 階幻方。

答：

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

5.　試以對角線法作 4 階幻方。

答：

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
16	3	2	13

6.　　試以 LUX 法作六階幻方。

答：　(1)　　作 LUX 矩陣：

對於 $(2n-1)\times(2n-1)$ 的矩陣中：

首 n 行全為 L，之後一行為 U，

餘下的全為 X。

再把矩陣正中間的一格 L 和

其下方的 U 位置對調。

L	L	L
L	U	L
U	L	U

(2)　　把原 $2n-1$ 階幻方作序數，

在每一小格對應的 2×2 方陣中

運用 LUX 法則順序填上數字。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

L:

4	1
2	3

U:

1	4
2	3

X:

1	4
3	2

32	29	4	1	24	21
30	31	2	3	22	23
12	9	17	20	28	25
10	11	18	19	26	27
13	16	36	33	5	8
14	15	34	35	6	7

7.　　在九張咭片上分別寫上 65、77、85、133、210、286、561、646 和 741 九個數，然後每人輪流拿走一張咭片，誰先拿到有相同因子的三個數便告勝利。現在甲一開始便拿下 210，乙要拿走哪些咭才可立於不敗之地呢？

答：　分解各數：

65　=　5×13，

77　=　7×11，

85　=　5×17，

133　=　7×19，

210　=　$2\times3\times5\times7$，

286　=　$2\times11\times13$，

561　=　$3\times11\times17$，

646　=　$2\times17\times19$，

741　=　$3\times13\times19$。

286	65	741
77	210	133
561	85	646

把這九個數排成右上方的方陣：

在方陣中同一行、列、對角線的各數均有相同的因子。

若甲先取 210，

則乙必須取下 286、561、646 或 741 其中一數才可立於不敗之地。

8. 試以給定的三階幻方作幻核，創作五階同心幻方。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

答：（1） 把原三階幻方加大至中心為 $\frac{n^2+1}{2}=\frac{5^2+1}{2}=13$。

16	9	14
11	13	15
12	17	10

（2） 從餘下的數字，即 1-8 和 18-25 分組列寫，
每組兩個數字之和為 26。

1-25, 2-24, 3-23, 4-22, 5-21, 6-20, 7-19, 8-18。

（3） 找出兩組數字置於四角，同一組數字置於同一條對角線上。

1				3
	16	9	14	
	11	13	15	
	12	17	10	
23				25

（4） 再把其餘各組數字填上空位中，使邊框的數字之和與幻和相同。
同一組數字須配在同一直行或橫行上。

1	18	22	21	3
20	16	9	14	6
2	11	13	15	24
19	12	17	10	7
23	8	4	5	25

9. 介紹丟勒幻方。

答：

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

10. 展示字母幻方。

答：

5	22	18
28	15	2
12	8	25

4	9	8
11	7	3
6	5	10

Five	Twenty-two	Eighteen
Twenty-eight	Fifteen	Two
Twelve	Eight	Twenty-five

數學是最廉宜的科學，

沒有如物理、化學般的高昂實驗，

所有研習數學的人只需原筆和紙張。

匈牙利數學家、教育學家

波利亞

(George Polya 1887-1985)

淺問

1. 試作一個與下列四階或五階拉丁方正交的拉丁方：

(a)

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	A	B
D	C	B	A

(b)

A	B	C	D	E
E	A	B	C	D
D	E	A	B	C
C	D	E	A	B
B	C	D	E	A

2. 試分別以暹邏法及梯階法作七階幻方。

3. 試以分解法作九階幻方。

4. 試分別以對角線法及旋轉法作八階幻方。

5. 試以 LUX 法作十階幻方。

6. 試以下列四階幻方和五階幻方作幻核，運用擴階法作六階和七階同心幻方。

(a)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

(b)

1	18	22	21	3
20	16	9	14	6
2	11	13	15	24
19	12	17	10	7
23	8	4	5	25

7. 求一個十二階立方幻方的幻和、平方幻和及立方幻和。

8. 下面的幻方稱為古爾真方，由阿根庭人古爾真製作，因而得名。
當中每個數字連同幻和均為全位數，即 0 至 9 均有出現的整數。

1037956284	1036947285	1027856394	1026847395
1026857394	1027846395	1036957284	1037946285
1036847295	1037856294	1026947385	1027956384
1027946385	1026957384	1037846295	1036857294

下面的為一個鏡反幻方，不論左右、上下反射或旋轉來看，也成幻方。

1111	1818	8181	8888
8881	8188	1811	1118
1888	1181	8818	8111
8118	8811	1188	1881

試比較古爾真方和鏡反幻方，述明兩者之關係。

詳答

1. (a)

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

(b)

A	B	C	D	E
D	E	A	B	C
B	C	D	E	A
E	A	B	C	D
C	D	E	A	B

2. 暹邏法

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

梯階法

46	15	40	9	34	3	28
21	39	8	33	2	27	45
38	14	32	1	26	44	20
13	31	7	25	43	19	37
30	6	24	49	18	36	12
6	23	48	17	42	11	29
22	47	16	41	10	35	4

3. 分解法

8	1	6
3	5	7
4	9	2

71	64	69	8	1	6	53	46	51
66	68	70	3	5	7	48	50	52
67	72	65	4	9	2	49	54	47
26	19	24	44	37	42	62	55	60
21	23	25	39	41	43	57	59	61
22	27	20	40	45	38	58	63	56
35	28	33	80	73	78	17	10	15
30	32	34	75	77	79	12	14	16
31	36	29	76	81	74	13	18	11

4. 對角線法

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

旋轉法

1	2	62	61	60	59	7	8
9	10	54	53	52	51	15	16
48	47	19	20	21	22	42	41
40	39	27	28	29	30	34	33
32	31	35	36	37	38	26	25
24	23	43	44	45	46	18	17
49	50	14	13	12	11	55	56
57	58	6	5	4	3	63	64

5.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

6. (a)

9	29	1	32	30	10
34	26	13	12	23	3
2	15	20	21	18	35
6	19	16	17	22	31
33	14	25	24	11	4
27	8	36	5	7	28

(b)

40	1	2	3	42	41	46
38	13	30	34	33	15	12
39	32	28	21	26	18	11
43	14	23	25	27	36	7
6	31	24	29	22	19	44
5	35	20	16	17	37	45
4	49	48	47	8	9	10

7. 幻和 $= \frac{1}{2}(12^2)(12^2+1)\div 12 = \frac{1}{2}(144)(145)\div 12$

$= 870$

平方幻和 $= \frac{1}{6}(12^2)(12^2+1)(2\times 12^2+1)\div 12$

$= \frac{1}{6}(144)(145)(289)\div 12$

$= 83810$

立方幻和 $= \frac{1}{4}(12^2)^2(12^2+1)^2\div 12 = \frac{1}{4}(144)^2(145)^2\div 12$

$= 9082800$

（註： 十二階立方幻方其實是現存已知最小的立方幻方，如下圖。）

1	22	33	41	62	66	79	83	104	112	123	144
9	119	45	115	107	93	52	38	30	100	26	136
75	141	35	48	57	14	131	88	97	110	4	70
74	8	106	49	12	43	102	133	96	39	137	71
140	101	124	42	60	37	108	85	103	21	44	5
122	76	142	86	67	126	19	78	59	3	69	23
55	27	95	135	130	89	56	15	10	50	118	90
132	117	68	91	11	99	46	134	54	77	28	13
73	64	2	121	109	32	113	36	24	143	81	72
58	98	84	116	138	16	129	7	29	61	47	87
80	34	105	6	92	127	18	53	139	40	111	65
51	63	31	20	25	128	17	120	125	114	82	94

8. 鏡反幻方中每行均由四個四位數組成，每個數位均有兩個數是 1，另外兩個數是 8，故幻和為 $(1+8)\times 2222=19998$。而古爾真方中每個元素雖不是四位數，但原理相若。古爾真方中每個元素均可分拆成三個部分，開始首兩個位全是「10」，第三至第六個位為一部分，第七至第十個位為另一部分。在第三至第六個位這一部分中，第三位只會是 2 或 3，第四位只會是 6 或 7，第五位只會是 8 或 9，第六位只會是 4 或 5。每個元素的不同只是因為這四個位的數字取值不同，因第七至第十位的數值其實是第三至第六個位的數值的一個互補。若我們把第三至第六位的數字化成 1 或 8，即奇為 1，偶為 8，便得一個對應的鏡反幻方了。所以古爾真方的產生原理便和鏡反幻方的相若了。

順道一言，古爾真方的幻和

$= \quad 1000000000\times 4+(26846284+37957395)\times 2$

$= \quad$ 4129607358 亦是一全位數。

觀察可導致發現，

觀察會把某種規律、模式和定律

揭示出來。

匈牙利數學家、教育學家

波利亞

(George Polya 1887-1985)