「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

代數 － 四則

摘要

1. 運用代數方法簡化四則運算。
2. 運用恆等式簡化四則運算：
   (a) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
   (b) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
   (c) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
   (d) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 - 3ab(a+b)$
   (e) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
   (f) $(a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4ab(a^2 + b^2) + 6a^2b^2$
3. 自訂運算符號及相關問題。
4. 基礎的代數式化簡及計算。
5. 運用帶餘數除法及歐幾里德（Euclid）法則。
6. 了解直式開方算法。
7. 淺介數學遊戲「算 24」，即以四張樸克牌配以四則運算，建立結果為 24 的算式。
8. 認識傅利曼（Friedman）數，即可以自身各數字作成一結果為自身的算式。

拾例

1.　若 $b=1999\times19981998-1998\times19991999+1$，求 b 的值。
(HKMO 1997/98 決賽團體)

答：　設 $x=1998$，

b　=　$(x+1)\times x(10001)-x\times(x+1)(10001)+1$　=　1。

2.　求乘積 999999×666666 的結果的數字之和。(SAMO-J 2004)

答：　原式　=　$666666\times(1000000-1)$

=　$666666000000-666666$

=　666665333334。

故其數字之和為 $6\times5+5+3\times5+4$　=　9×6　=　54。

3.　求 54321 的平方根的整數部分。

答：　5|43|21

2		3		3
5	4	3	2	1
4				
1	4	3		
1	2	9		
	1	4	2	1
	1	3	8	9
			3	2

2		
2		
4	3	
	3	
4	6	3

所以 54321 的平方根的整數部分為 233。

4. 求不大於 93318379 的最大完全平方數。

答： 93|31|83|79

	9		6		6		0
9	3	3	1	8	3	7	9
8	1						
1	2	3	1				
1	1	1	6				
	1	1	5	8	3		
	1	1	5	5	6		
				2	7	7	9
							0
				2	7	7	9

	9			
	9			
1	8	6		
		6		
1	9	2	6	
			6	
1	9	3	2	0

所以不大於 93318379 的最大完全平方數為 $93318379-2779=93315600$。

（註： $93315600=9660^2$。）

5. 求 $\dfrac{1^4+2009^4+2010^4}{1^2+2009^2+2010^2}$ 的值。（HKPSC 2009）

答： 設 $a=2009$，

原式化為

$$\frac{1^4+a^4+(a+1)^4}{1^2+a^2+(a+1)^2} = \frac{2a^4+4a^3+6a^2+4a+2}{2a^2+2a+2}$$

$$= \frac{a^4+2a^3+3a^2+2a+1}{a^2+a+1} = \frac{(a^2+a+1)^2}{a^2+a+1}$$

$$= a^2+a+1 = 2009^2+2009+1$$

$$= (2009)(2010)+1 = 4038091$$

6. 求 $\dfrac{1999^3-1997^3-2^3}{1999\times 1997}$。

答： 故原式=

$$\frac{a^3-b^3-c^3}{ab} = \frac{(b+c)^3-b^3-c^3}{(b+c)b}$$

$$= \frac{b^3+c^3+3bc(b+c)-b^3-c^3}{(b+c)c}$$

$$= \frac{3bc(b+c)}{(b+c)b} = 3c = 6$$ 。

7. 若 $a-b=7+\sqrt{22}$，$b-c=7-\sqrt{22}$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值。

答：

$$c-a = -[(a-b)+(b-c)] = -[7+\sqrt{22}+7-\sqrt{22}]$$
$$= -14$$

原式
$$= \frac{1}{2}(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$$
$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$
$$= \frac{1}{2}[(7+\sqrt{22})^2+(7-\sqrt{22})^2+(-14)^2]$$
$$= \frac{1}{2}[49+14\sqrt{22}+22+49-14\sqrt{22}+22+196]$$
$$= \frac{338}{2} = 169$$。

8. 若一個兩位或以上的正整數的各個數字可以組成一道只用加、減、乘、除、乘方和括號組成的算式，算式中各數字出現的次數和原整數中的相同，且算式的結果正是原本該整數，此數被稱為「傳利曼數」。如 347 為傳利曼數，因為 $4+7^3=347$；又如 8092 為傳利曼數，因為 $90^2-8=8092$。現知 3125 為傳利曼數，試列出該數的算式。

答：$3125 = (3+1\times 2)^5$。

9. 若 $a*b=ab+1$，且 $s=(1*2)+(3*4)-(5*6)$，求 s。

答：

$$s = (1\times 2+1)+(3\times 4+1)-(5\times 6+1)$$
$$= 3+13-31 = -15$$

10. 在全體有理數中引進一種新運算 ∇，其意義為 $x\nabla y=ax+by+c$，其中 a,b,c 為常數。已知 $3\nabla 5=15$，$4\nabla 7=28$，求 $1\nabla 1$ 的值。

答：

$3\nabla 5 = 3a+5b+c = 15$ …(1)

$4\nabla 7 = 4a+7b+c = 28$ …(2)

(2) – (1)：$a+2b = 13$ …(3)

(3)*4 – (2)：$b-c = 24$ …(4)

(3) – (4)：$a+2b-(b-c) = 11$

$a+b+c = 11$

$1\nabla 1 = a+b+c = 11$。

淺問

1. $I=19971999\times19971999$，$J=19991999\times19971997$，求 $|I-J|$ 的值。

2. 設 $b=89+899+8999+89999+899999$，求 b 的值。
(HKMO 2004/05 決賽團體)

3. 若 $p=\dfrac{78^3+22^3}{78^2-78\times22+22^2}$，求 p。(HKMO 1984/85 決賽團體)

4. 若 $q=\dfrac{100^3-64^3-36^3}{64\times36}$，求 q。

5. 對於每對實數 a,b，其中 $a\neq b$，定義 $a\oplus b=\dfrac{a+b}{a-b}$。求 $(1\oplus2)\oplus3$ 的值。(AMC 10 2005)

6. 定義 $a\otimes b=ab+a+b$。若 $3\otimes x=27$，求 x 的值。
(中國重慶市初中數學競賽 2002)

7. 已知 111111222222 = $c(c+1)$。求 c 的值。(HKMO 2000/01 決賽團體)

8. 試求下列各數的平方根的整數部分：
(a) 9413 (b) 199771 (c) 24682468

9. 若 $a=1990x+1989, b=1990x+1990, c=1990x+1991$，求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值。(五市初數聯 1990)

10. 當 $x-y=1$ 時，$x^4-xy^3-x^3y-3x^2y+3xy^2+y^4$ 的值。
(中國北京市初中數學競賽 1991)

11. 試以下列的數字配上加、減、乘、除、乘方和括號，各建立一道結果為 24 的算式。
(a) (1, 4, 7, 10) (b) (3, 3, 5, 5) (c) (7, 8, 9, 10)

12. 試以下列的數字配上加、減、乘、除、乘方和括號，各建立五道不同的算式，每一道算式的結果均為 24。
(a) (1, 2, 3, 8) (b) (2, 5, 6, 7) (c) (4, 6, 8, 12)

詳答

1. 設 $x=1999$，則 $I=[10000(x-2)+x]\times[10000(x-2)+x]$

$= 10^8(x-2)^2+2\times10^4x(x-2)+x^2$

而 $J=[10000x+x]\times[10000(x-2)+(x-2)]$

$= 10^8x(x-2)+2\times10^4x(x-2)+x(x-2)$

$|I-J|=J-I = 10^8[x(x-2)-(x-2)^2]+[x(x-2)-x^2]$

$= 10^8(2x-4)-2x$

$= 399400000000-3998$

$=$ 399399996002

2. b $= (90-1)+(900-1)+(9000-1)+(90000-1)+(900000-1)$

$= 999990-5 =$ 999985

3. p $= \dfrac{(78+22)(78^2-78\times22+22^2)}{78^2-78\times22+22^2} = 78+22$

$=$ 100

4. 原式 $= \dfrac{(64+36)^3-64^3-36^3}{64\times36}$

$= \dfrac{64^3+36^3+3\times64\times36\times(64+36)-64^3-36^3}{64\times36}$

$= \dfrac{3\times64\times36\times100}{64\times36} =$ 300。

5. $(1\oplus2)\oplus3 = \dfrac{1+2}{1-2}\oplus3 = (-3)\oplus3 = \dfrac{-3+3}{-3-3}$

$=$ 0。

6. $3\otimes x = 3x+3+x = 27$

$4x = 24$

x = 6。

7. 111111222222 $= 111111\times1000002 = 111111\times(999999+3)$

$= 333333\times(333333+1)$

所以 c = 3。

8. (a) 94|13

	9		7
9	4	1	3
8	1		
1	3	1	3
1	3	0	9
			4

	9	
	9	
1	8	7

所以 9413 平方根的整數部分為 97。

(b) 19|97|71

	4		4		6
1	9	9	7	7	1
1	6				
	3	9	7		
	3	3	6		
		6	1	7	1
		5	3	1	6
			8	5	5

4		
4		
8	4	
	4	
8	8	6

所以 199771 的平方根的整數部分為 446。

(c) 24|68|24|68

	4		9		6		8
2	4	6	8	2	4	6	8
1	6						
	8	6	8				
	8	0	1				
		6	7	2	4		
		5	9	1	6		
			8	0	8	6	8
			7	9	4	2	4
				1	4	4	4

4			
4			
8	9		
	9		
9	8	6	
		6	
9	9	2	8

所以 24682468 的平方根的整數部分為 4968。

9. 由於 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$，同理有 $(b-c)^2=b^2-2bc+c^2$ 及 $(c-a)^2=c^2-2ca+a^2$。把三式相加得

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$$

所以原式 $= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

另 $a-b=(1990x+1989)-(1990x+1990)=-1$

$b-c=(1990x+1990)-(1990x+1991)=-1$

$c-a=(1990x+1991)-(1990x+1989)=2$

代入上式得

原式 $= \frac{1}{2}[(-1)^2+(-1)^2+(2)^2] = 3$

10. 原式 $= x(x^3-y^3)-y(x^3-y^3)-3xy(x-y)$

$= (x-y)(x^3-y^3)-3xy(x-y) = (x-y)(x^3-y^3-3xy)$

$= (x-y)[(x-y)(x^2+xy+y^2)-3xy]$

$= x^2+xy+y^2-3xy = x^2-2xy+y^2$

$= (x-y)^2 = 1$

11. (a) 建議答案：$(7-1^{10})\times 4=24$

(b) 建議答案：$5\times 5-\frac{3}{3}=24$

(c) 建議答案：$\frac{8\times 9}{10-7}=24$

12. (a) 建議答案：$(1+3)\times(8-2)=24$　$(1+3+8)\times 2=24$　$\frac{8}{1-\frac{2}{3}}=24$

$8\times 3\times(2-1)=24$　$(8-3)^2-1=24$　$2^{1+3}+8=24$

(b) 建議答案：$2\times 6+5+7=24$　$(7-5+2)\times 6=24$　$2^{7-5}\times 6=24$

$6^2-7-5=24$　$5^2-7+6=24$　$\frac{(7+5)^2}{6}=24$

(c) 建議答案：$(4+6-8)\times 12=24$　$12+\frac{8\times 6}{4}=24$　$\frac{12\times 4}{8-6}=24$

$(12-6)\times(8-4)=24$　$(6-\frac{12}{4})\times 8=24$　$(\frac{12}{6})^4+8=24$