

代數 - 四則應用

摘要

1. 盈虧問題
人數 = (盈 + 不足) / 個數差
人數 = (盈 - 盈) / 個數差
人數 = (不足 - 不足) / 個數差
2. 流水問題：
划速 = (順流船速 + 逆流船速) / 2
水速 = (順流船速 - 逆流船速) / 2
3. 行程問題
(a) 相向而行：
相會時間 = 全距離 / 兩人速度總和
(b) 同向而行：
追及時間 = 起始距離 / 兩人速度相差
4. 植樹問題：
(a) 線型公路：
一旁植樹數 = 全長 / 兩樹間距 + 1。
(b) 環型公路：
一旁植樹數 = 全長 / 兩樹間距。
5. 工程問題：
若甲以 a 日完成工程，乙以 b 日完成工程，
則甲每天工作量为全工程的 $\frac{1}{a}$ ，乙為 $\frac{1}{b}$ 。
兩人合作每天工作量为 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ，
故共需 $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})^{-1}$ 日完成工程。
6. 運用方程式解決常見的四則應用題，如和差問題、年齡問題、倍數問題、牛草問題、龜鶴問題等。

拾例

1. 兩數之和為 1234，差為 56，求大數。

答：設大、小二數分別為 a, b ，

$$\begin{cases} a+b=1234 \\ a-b=56 \end{cases}, \text{ 故 } 2a=1290, a=645. \text{ 即大數為 } 645.$$

2. 在 300 米小路兩旁植樹，每 10 米植樹一株，問共植樹多少株？

答：植樹數為 $2 \times \left(\frac{300}{10} + 1 \right) = 2 \times 31 = 62$ 株。

3. 今有共買物，人出八盈三錢，人出七不足四。問人數物價各幾何？
(《九章算術》)

答：設人數、物價分別為 a, b ，

$$\text{即 } b = 8a - 3 = 7a + 4,$$

$$\text{解得 } a = 7, b = 7(7) + 4 = 53.$$

故共有 7 人，物價 53 錢。

4. 一個男人和小孩分別需用 6 小時和 4 小時來完成一件工作，若兩人以同樣的效率一起完成工作，問需用多少小時？

答：需用 $\frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}$ 小時。

5. 水程 300 公里，順流而下，15 小時可達，逆流而上，則需 20 小時。問船速多少？

答：設船速和流速分別為 u, v 公里/小時。

$$\text{則 } \begin{cases} u+v = \frac{300}{15} = 20 \\ u-v = \frac{300}{20} = 15 \end{cases}, \text{ 即 } 2u = 35, u = 17.5.$$

故船速為每小時 17.5 公里。

6. 400 公里路程，甲行 40 日，乙行 32 日。今甲由一端出發，4 日後，乙由同一地點出發追甲。問乙行多少公里才可追及甲。

答：甲日行 $\frac{400}{40} = 10$ 公里，

乙日行 $\frac{400}{24} = 12.5$ 公里。

即每日兩人相距減少 $12.5 - 10 = 2.5$ 公里。

四日後，甲、乙距離 $4 \times 10 = 40$ 公里。

故乙得用 $\frac{40}{2.5} = 16$ 日追及甲，即行了 $16 \times 12.5 = 200$ 公里。

7. 甲、乙兩地相距 500 公里。在同一時間裡，陳勝在甲地出發，以每小時 20 公里的速度向乙地走；吳廣在乙地起行，以每小時 30 公里向甲地行。問兩人在出發後多少小時相遇？

答：兩人在出發後的 $\frac{500}{20+30} = \frac{500}{50} = 10$ 小時後相遇。

8. 甲、乙兩人在長 6.4 公里的環型賽道繞圈跑，速度分別為每秒 6 米和 4 米。他們同時同地背向出發，問 1 小時內，他們相遇多少次？

答：第一次相遇，兩人共跑了 6400 米，

即需時 $\frac{6400}{6+4} = \frac{6400}{10} = 640$ 秒。

一小時共有 $60 \times 60 = 3600$ 秒。

故共相遇 $\left[\frac{3600}{640} \right] = 5$ 次。

9. 有龜、鶴若干頭，只知鶴比龜多 40 頭。若共有足數 440 隻，問有龜、鶴共有多少頭。

答：設有龜、鶴各有 x, y 隻。

則 $\begin{cases} y - x = 40 \\ 4x + 2y = 440 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} y - x = 40 \\ 2x + y = 220 \end{cases}$ 。

兩式相減，得 $3x = 180$ ， $x = 60$ 。

故有龜 60 頭，即鶴有 100 頭。兩者共有 $60 + 100 = 160$ 頭。

10. 有一水池，一方注水一方抽水，要將滿池水抽乾，用 10 台抽水需 5 小時；用 8 台抽水需 7 小時。若只可以 12 台抽水把一滿池水抽乾，要用多少小時？

答：設一台抽水每小時抽水量為 x ，滿池水量為 y ，每小時注水量為 z 。

$$\text{則有 } \begin{cases} 5 \times 10x = y + 5z \\ 7 \times 8x = y + 7z \end{cases}, \text{兩式相減，得 } 2z = 6x, \text{即 } z = 3x。$$

$$\text{即得 } y = 35x。$$

現以 12 台抽水抽水，設 n 小時完成：

$$12nx = 35x + n(3x) = 35x + 3nx$$

$$9nx = 35x$$

$$\text{即得 } n = \frac{35}{9}, \text{故最要以 } \frac{35}{9} \text{ 小時把一滿池水抽乾。}$$

數可以說成是統治整個量的世界，
而算術的四則可以被認為是
作為數學家的完全的裝備。

法國數學家

曼德勃羅

(Benoit Mandelbrot 1924-)

淺問

1. 兩數之和為 13，差為 9，求兩數的乘積。(FWMT-C 2001)
2. 在一段小徑兩旁安裝電燈柱，每隔 10 米安裝一支，共裝 100 支，求小路的長度。
3. 今有共買羊，人出五不足四十五，人出七不足三。問人數羊價各幾何？(《九章算術》)
4. 甲、乙、丙、丁四名打字員承擔全部打字任務，若由這四人中某一人單獨完成全部任務，則甲需 24 小時，乙需 20 小時，丙需 16 小時，丁需 12 小時。如果甲、乙、丙、丁四人同時打字，需要多少時間完成任務？(中國重慶市初中數學競賽 2002)
5. 有隻小船在河中航行，逆流而上，3 小時行 3 公里；順流而下，1 小時行 3 公里。求河流的速度。
6. A, B 兩地相距 416 公里，甲車從 A 地開往 B 地，每小時行 32 公里。甲車開出半小時後，乙車從 B 地開往 A 地，它的速度是甲車的 1.5 倍。問乙車開出後幾小時和甲車相遇？
7. 甲、乙兩人在長 500 米的跑道來回慢跑，速度分別為每秒 3 米和 4 米。他們同時在兩端相向出發，問 30 分鐘內，他們相遇多少次？
8. 某人沿電車軌步行，速度為每小時 3 公里。一路上，每隔 9 分鐘就有一輛電車從身後追上來，每隔 6 分鐘便有一輛電車迎面開來。設每相鄰兩班電車的時間隔間都相同，且每輛電車的速度都相同。求電車的速度。
9. 龜、鶴共 100 頭，足數 280，問龜、鶴各有多少？
10. 有雞、兔若干頭，只知雞比兔多 24 頭。若共有足數 240 隻，問有雞、兔各有多少頭。
11. 有一水池，一方注水一方抽水，要將滿池水抽乾，用 13 台抽水機需 7 小時；用 10 台抽水機需 10 小時。若要在 4 小時內把一滿池水抽乾，至少需要幾台抽水機？

詳答

1. 設大、小二數分別為 a, b ,

$$\begin{cases} a+b=13 \\ a-b=9 \end{cases}, \text{ 故 } 2a=22, a=11 \text{ 及 } b=2. \text{ 即乘積為 } 11 \times 2 = 22.$$

2. 小路長 $10 \times \left(\frac{100}{2} - 1\right) = 10 \times 49 = 490$ 米。

3. 設人數、羊價分別為 a, b ,

即 $b = 5a + 45 = 7a + 3$,

解得 $2a = 42$

$$a = 21$$

代入得 $b = 5(21) + 45 = 150$ 。

故共有 21 人，羊價 150 錢。

4. 需時 $= \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{20} + \frac{1}{16} + \frac{1}{12}} = \frac{240}{10+12+15+20} = \frac{240}{57}$

$$= \frac{80}{19} \text{ 小時。}$$

5. 順流速度 $= 3$ 公里/小時，逆流速度 $= 1$ 公里/小時。

設靜水划船和河流的速度分別為 a, b 公里/小時。

$$a+b=3 \text{ 及 } a-b=1, \text{ 故 } a = \frac{3-1}{2} = 1, \text{ 即河流的速度為 } 1 \text{ 公里/小時。}$$

6. 乙車開出時，和甲車距離 $= 416 - 32 \times \frac{1}{2} = 400$ 公里。

$$\text{所需時間} = \frac{400}{32+32 \times 1.5} = \frac{400}{80} = 5 \text{ 小時。}$$

7. 第一次相遇，兩人共跑了 500 米，

以後每多走 1000 米，兩人便再相遇一次。

30 分鐘內，兩人共走了 $30 \times 60 \times (3+4) = 12600$ 米。

$$\begin{aligned} \text{所以他們相遇次數為 } & \frac{12600-500}{1000} + 1 = 12.1 + 1 \\ & = 13.1. \end{aligned}$$

但次數應為整數，共答案為 13。

8. 設電車的速度為每小時 x 公里，且電車與電車之間相距 y 公里。

$$\text{則 } \frac{y}{x-3} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}, \quad \frac{y}{x+3} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}。$$

$$\begin{aligned} \text{故得 } \frac{3}{20}(x-3) &= \frac{1}{10}(x+3) \\ 3x-9 &= 2x+6 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

即電車的速度為每小時 15 公里。

9. 設龜、鶴各有 x, y 隻。

$$\text{則 } \begin{cases} x+y=100 \\ 4x+2y=280 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x+y=100 \\ 2x+y=140 \end{cases}, \text{ 兩式相減, 得 } x=40, y=60。$$

故有龜 40 隻、鶴 60 隻。

10. 設有雞、兔各有 x, y 頭。

$$\text{則 } \begin{cases} x-y=24 \\ 2x+4y=240 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x-y=24 \\ x+2y=120 \end{cases}。$$

兩式相減，得 $3y=96$ ， $y=32$ 。

故有兔 32 頭，即雞有 $32+24=56$ 頭。兩者共有 $32+56=88$ 頭。

11. 設一台抽水機每小時抽水量為 x ，滿池水量為 y ，每小時注水量為 z 。

$$\text{則有 } \begin{cases} 7 \times 13x = y + 7z \\ 10 \times 10x = y + 10z \end{cases}, \text{ 兩式相減, 得 } 3z = 9x, \text{ 即 } z = 3x。$$

即得 $y = 70x$ 。

現以 4 小時內抽水，故設有抽水機 n 台：

$$4nx \geq 70x + 4(3x) = 82x$$

即得 $n \geq \frac{82}{4} = \frac{41}{2}$ ，故最少要 21 台抽水機。