「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

代數 － 有理化

摘要

1. 有理化根值：

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}\times\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\times\dfrac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}\times\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a\pm b}$

(d) 利用分組法，處理分母為三根值和或以上的分式有理化。

2. 雙重根號的化簡：

$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{(x+y)\pm2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$，其中 $x>y>0$

3. 運用常用根值恆等式：

(a) $\dfrac{a}{\sqrt{n}+\sqrt{n+a}}=\sqrt{n+a}-\sqrt{n}$

(b) $\dfrac{a}{(n+a)\sqrt{n}+n\sqrt{n+a}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n-a}}$

(c) $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)-1}=n^2+3n+1$

(d) $\sqrt{n^2+n^2(n+1)^2+(n+1)^2}=n^2+n+1$

拾例

1. 若 $a=\sqrt{1997\times1998\times1999\times2000+1}$，求 a 的值。
(HKMO 1999/2000 決賽團體)

答： 令 $x=1997$，

則 a $= \sqrt{[x(x+3)][(x+1)(x+2)]+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x+1)^2-1^2+1} = x^2+3x+1$

故 a $= 1997^2+3\times1997+1 = 1997\times2000+1$

$= 3994001$

2. 計算 $\sqrt{1999^2\times2000^2+1999^2+2000^2}$。

答： 設 $x=1999$，

原式 $= \sqrt{x^2(x+1)^2+x^2+(x+1)^2} = \sqrt{x^2(x+1)^2+x^2+x^2+2x+1}$

$= \sqrt{x^2(x+1)^2+2x^2+2x+1} = \sqrt{[x(x+1)]^2+2x(x+1)+1}$

$= \sqrt{[x(x+1)+1]^2} = x(x+1)+1$

$= 1999\times2000+1 = 3998001$。

3. 設 r 為 $\sqrt{5}$ 的小數部分，求 $r^2+2r+2\sqrt{5}$ 的值。(HKMHSAC 2007/08)

答： 即 $r=\sqrt{5}-2$，

原式 $= r(r+2)+2\sqrt{5} = (\sqrt{5}-2)\times\sqrt{5}+2\sqrt{5}$

$= 5-2\sqrt{5}+2\sqrt{5} = 5$

4. 若 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，求 $3x^2-5xy+3y^2$ 的值。

答： 顯然 $xy=1$，

$x+y = \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} = \dfrac{2(3+2)}{3-2} = 10$

原式 $= 3(x^2+y^2)-5xy = 3(x+y)^2-11xy$

$= 3(10)^2-11(1) = 289$。

5. 化簡 $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ 。

答： 原式 $= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-6}$

$= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2+2\sqrt{6}+3-6} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2\sqrt{6}-1}$

$= \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{6}+1)}{(2\sqrt{6}-1)(2\sqrt{6}+1)}$

$= \dfrac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}+12+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{24-1}$

$= \dfrac{12+7\sqrt{2}+5\sqrt{3}+\sqrt{6}}{23}$ 。

6. 有理化 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$ 。

答： 原式 $= \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}} \times \dfrac{\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4\times 2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4\times 2}+\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}{4-2}$

$= \dfrac{2\sqrt[3]{2}+2+\sqrt[3]{4}}{2} = \dfrac{2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}$ 。

7. 化簡 $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ 。

答： 令 $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ （其中 $a>b$）

即 $9-4\sqrt{5} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$

所以 $\begin{cases} a+b=9 \\ ab=4\times 5=20 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases}$ 。

所以 $\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-\sqrt{4} = \sqrt{5}-2$ 。

8. 化簡 $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 。

答： $\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad = \quad \dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

令 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \quad = \quad 4+2\sqrt{3}$ （其中 $a>b$）

$a+b+2\sqrt{ab} \quad = \quad 4+2\sqrt{3}$

即 $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}$ ， $\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases}$ 。

所以 $\sqrt{4+2\sqrt{3}} \quad = \quad \sqrt{3}+1$ 。

故 $\sqrt{2+\sqrt{3}} \quad = \quad \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \quad = \quad \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ 。

9. 設 $\sqrt{a}=\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$ ，求 a 的值。（HKMO 2006/07 決賽個人）

答： a $= (\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}})^2$

$= 7+\sqrt{13}+7-\sqrt{13}-2(\sqrt{7+\sqrt{13}})(\sqrt{7-\sqrt{13}})$

$= 14-2(\sqrt{49-13}) \quad = \quad 14-2\sqrt{36} \quad = \quad 2$

10. 知 $a+b=\sqrt{\sqrt{1974}+\sqrt{423}}$ ， $a-b=\sqrt{\sqrt{1974}-\sqrt{423}}$ ，求 ab 的值。

答： $(a+b)^2 \quad = \quad \sqrt{1974}+\sqrt{423}$

$a^2+2ab+b^2 \quad = \quad \sqrt{1974}+\sqrt{423} \quad \ldots \quad (1)$

$(a-b)^2 \quad = \quad \sqrt{1974}-\sqrt{423}$

$a^2-2ab+b^2 \quad = \quad \sqrt{1974}-\sqrt{423} \quad \ldots \quad (2)$

（1） － （2）：

$4ab \quad = \quad 2\sqrt{423}$

$ab \quad = \quad \dfrac{\sqrt{423}}{2} = \dfrac{3\sqrt{47}}{2}$ 。

淺問

1. 計算下列數式的值：

   (a) $\sqrt{999000^2+999^2+1000^2}$　　(b) $\sqrt{2010\times2011\times2012\times2013+1}$

2. 求根式 $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$ 的值。（AHSME 1993）

3. 若 x 和 y 分別是 $\sqrt{7}$ 的整數部分和小數部分，求 x^2+xy+y^2 的值。

4. 已知 $a+b=\sqrt{\sqrt{2011}+\sqrt{2010}}$，$a-b=\sqrt{\sqrt{2011}-\sqrt{2010}}$，求 ab 的值。（HKMO 2010/11 初賽個人）

5. 設 $x=\sqrt{3+\sqrt{3}}$ 及 $y=\sqrt{3-\sqrt{3}}$，求 $x^2(1+y^2)+y^2$ 的值。（HKMO 1999/2000 初賽團體）

6. 設 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$ 及 $y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$，求 $\dfrac{y}{x^2}+\dfrac{x}{y^2}$ 的值。

7. 化簡下列各式：

   (a) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$　　(b) $\sqrt{6-\sqrt{35}}$。

8. 化簡下列各式：

   (a) $\sqrt{9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$　　(b) $\sqrt{9-6\sqrt{2}}+\sqrt{9+6\sqrt{2}}$

9. 求 $(52+6\sqrt{43})^{\frac{3}{2}}-(52-6\sqrt{43})^{\frac{3}{2}}$ 的值。（AIME 1990）

10. 有理化下列各式：

    (a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$　　(b) $\dfrac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

11. 求根式 $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\ldots}}}}}$ 的值。

詳答

1. (a) 令 $x=999$，

原式 $= \sqrt{[x(x+1)]^2+x^2+(x+1)^2}$

$= \sqrt{[x(x+1)]^2+x^2+x^2+2x+1}$

$= \sqrt{[x(x+1)]^2+2x^2+2x+1}$

$= \sqrt{[x(x+1)]^2+2x(x+1)+1}$

$= \sqrt{[x(x+1)+1]^2} = x(x+1)+1$

$=$ 999001。

(b) 令 $x=2010$，

原式 $= \sqrt{[x(x+3)][(x+1)(x+2)]+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)(x+3x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x+1)} = x^2+3x+1$

$= 2010^2+3\times 2010+1 = 2010(2013)+1$

$=$ 4046131。

2. 原式 $= \sqrt{\dfrac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}} = \sqrt{\dfrac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}} = \sqrt{2^8}$

$= 2^4 =$ 16。

3. $x=2$ 及 $y=\sqrt{7}-2$，

$x^2+xy+y^2 = (x+y)^2-xy = (\sqrt{7})^2-2(\sqrt{7}-2)$

$= 7-2\sqrt{7}+4 = 11-2\sqrt{7}$

4. $(a+b)^2 = \sqrt{2011}+\sqrt{2010}$

$a^2+2ab+b^2 = \sqrt{2011}+\sqrt{2010} \quad \ldots \quad (1)$

$(a-b)^2 = \sqrt{2011}-\sqrt{2010}$

$a^2-2ab+b^2 = \sqrt{2011}-\sqrt{2010} \quad \ldots \quad (2)$

(1) – (2)：

$4ab = 2\sqrt{2010}$

$ab = \dfrac{\sqrt{2010}}{2}$

5. 解法 1：

$$\begin{aligned} x^2(1+y^2)+y^2 &= x^2+x^2y^2+y^2 \\ &= (x^2+1)(y^2+1)-1 \\ &= (3+\sqrt{3}+1)(3-\sqrt{3}+1)-1 \\ &= (4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})-1 \\ &= 16-3-1 = 12 \end{aligned}$$

解法 2：

$$\begin{aligned} x^2(1+y^2)+y^2 &= x^2+x^2y^2+y^2 \\ &= (3+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(3-\sqrt{3}) \\ &= 6+(3^2-3) = 12 \end{aligned}$$

6. $x+y = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{5}$

$xy = (\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2})(\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{1}{4}(5-2) = \dfrac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2} &= \frac{x^3+y^3}{x^2y^2} = \frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{(xy)^2} \\ &= \frac{(x+y)[(x+y)^2-3xy]}{(xy)^2} = \frac{(\sqrt{5})[5-3(\frac{3}{4})]}{(\frac{3}{4})^2} \\ &= \frac{\frac{11}{4}\sqrt{5}}{9/16} = \frac{44\sqrt{5}}{9} \text{。} \end{aligned}$$

7. (a) $\sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{8}} = \sqrt{(2+4)+2\sqrt{(2\times 4)}}$

$= \sqrt{2}+\sqrt{4} = 2+\sqrt{2}$ 。

(b) $\sqrt{6-\sqrt{35}} = \dfrac{\sqrt{12-2\sqrt{35}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{(5+7)-2\sqrt{(5\times 7)}}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{10}}{2}$ 。

8. (a) 原式 $= \sqrt{9+4(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{13+4\sqrt{3}}$

$= \sqrt{13+2\sqrt{12}} = \sqrt{12}+1$

$= 1+2\sqrt{3}$ 。

(b) $\sqrt{9\pm 6\sqrt{2}} = \sqrt{9\pm 2\sqrt{18}} = \sqrt{(3+6)\pm 2\sqrt{3\times 6}}$

$= \sqrt{6}\pm\sqrt{3}$

原式 $= \sqrt{9-2\sqrt{18}}+\sqrt{9+2\sqrt{18}}$

$= \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$

9. 原式 $= (52+2\sqrt{9\times 43})^{\frac{3}{2}}-(52-2\sqrt{9\times 43})^{\frac{3}{2}}$

$= (9+43+2\sqrt{9\times 43})^{\frac{3}{2}}-(9+43-2\sqrt{9\times 43})^{\frac{3}{2}}$

$= (\sqrt{43}+\sqrt{9})^{\frac{3}{2}}-(\sqrt{43}-\sqrt{9})^{\frac{3}{2}}$

$= (\sqrt{43}+\sqrt{9}-\sqrt{43}+\sqrt{9})$

$\times[(\sqrt{43}+3)^2+(\sqrt{43}+3)(\sqrt{43}-3)+(\sqrt{43}-3)^2]$

$= 6(43+6\sqrt{43}+9+43-9+43-6\sqrt{43}+9)$

$= 6(129+9) = 828$

10. (a) $$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}$$
$$= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

(b) $$\frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}\times\frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(1-\sqrt{3})^2-5}$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1-2\sqrt{3}+3-5} = \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-1-2\sqrt{3}}$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-1-2\sqrt{3}}\times\frac{-1+2\sqrt{3}}{-1+2\sqrt{3}}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{3}-6-2\sqrt{15}}{1-12}$$
$$= \frac{-7+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{-11}$$
$$= \frac{7-3\sqrt{3}-\sqrt{5}+2\sqrt{15}}{11}$$

11. 設原式為 x，則 $x=\sqrt{2-\sqrt{2+x}}$

$$x^2 = 2-\sqrt{2+x}$$
$$x^2-2 = \sqrt{2+x}$$
$$(x^2-2)^2 = 2+x$$
$$x^4-4x^2+4 = 2+x$$
$$x^4-4x^2-x+2 = 0$$

以代入法，測得 $x=-1,2$ 為方程的根，再以長除法分解

$$(x+1)(x-2)(x^2+x-1)=0$$

解得 $x=-1,2,\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$。但由於 $0<x<2$，故 $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$。