「噢！數？」拾例集　周浩然輯

代數 － 餘式定理

摘要

1. 基本的多項式運算，簡單的展開式系數求值。
2. 介紹多項式長除法、綜合除法。
3. 餘式定理：
   $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 的餘式為 $f(a)$。
4. 利用餘式定理分解多項式。

5. 利用餘式定理分解多元對稱多項式。

以下為一些對稱多項式的例子：

（a）非齊次對稱多項式

（i）二元多項式

一次：　$A(x+y)+B$

二次：　$A(x^2+y^2)+Bxy+C(x+y)+D$

三次：　$A(x^3+y^3)+B(x^2y+y^2x)+C(x^2+y^2)$
$+Dxy+E(x+y)+F$

(ii) 三元多項式

一次：　$A(x+y+z)+B$

二次：　$A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)$
$+C(x+y+z)+D$

（b）齊次對稱多項式

（i）二元多項式

一次：　$A(x+y)$

二次：　$A(x^2+y^2)+Bxy$

三次：　$A(x^3+y^3)+B(x^2y+y^2x)$

四次：　$A(x^4+y^4)+B(x^3y+y^3x)+Cx^2y^2$

五次：　$A(x^5+y^5)+B(x^4y+y^4x)$
$+C(x^3y^2+y^3x^2)$

六次：　$A(x^6+y^6)+B(x^5y+y^5x)$
$+C(x^4y^2+y^4x^2)+Dx^3y^3$

(ii) 三元多項式

一次：　$A(x+y+z)$

二次：　$A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+yz+zx)$

三次：　$A(x^3+y^3+z^3)$
$+B(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)$
$+Cxyz$

拾例

1. 求 $(1+3x+5x^2+7x^3+9x^4)^4$ 展開式中的 x^2 的系數。

答： 原式 $= (1+3x+5x^2+...)^4$

$= [(1)^2+(3x)^2+(5x^2)^2+2(1)(3x)+2(1)(5x^2)+2(3x)(5x^2)+...]^2$

$= (1+9x^2+6x+10x^2+...)^2$

$= (1+6x+19x^2+...)^2$

$= (1)^2+(6x)^2+(19x^2)^2+2(1)(6x)+2(1)(19x^2)+2(6x)(19x^2)+...$

$= 1+36x^2+12x+38x^2+...$

$= 1+12x+74x^2+...$

故所求系數是 74。

2. 求 $(x^2-9x+7)^3$ 除以 x^2-7x+9 的餘式。

答： 令 $y=x^2-7x+9$，

$(x^2-9x+7)^3 = (y-2x-2)^3$

$= y^3-3(2x+2)y^2+3(2x+2)^2y-(2x+2)^3$

由於上式右邊的首三項均可整除 $y=x^2-7x+9$，

故上式除以 $y=x^2-7x+9$ 的餘式和末項除以 y 的餘式相同。

末項 $= -(2x+2)^3 = -8x^3-24x^2-24x-8$

$= (-8x-80)(x^2-7x+9)-512x+712$。

故餘式為 $-512x+712$。

3. 求 x^3+3x^2+3x+1 與 x^3+4x^2+7x+4 的最大公因式與最小公倍式。

答： $(x^3+3x^2+3x+1,\ x^3+4x^2+7x+4) = (x^2+4x+3,\ x^3+4x^2+7x+4)$

$= (x^2+4x+3,\ 4x+4)$

$= (x^2+4x+3,\ x+1)$

$= (2x+2,\ x+1)$

$= x+1$

故最大公因式為 $x+1$。

$x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3$，

$x^3+4x^2+7x+4 = (x+1)(x^2+3x+4)$。

故最小公倍式為 $\dfrac{(x^3+3x^2+3x+1)(x^3+4x^2+7x+4)}{x+1}$

$= \dfrac{(x+1)^4(x^2+3x+4)}{x+1} = (x+1)^3(x^2+3x+4)$。

4. 設 $f(x)$ 為 x^4+64 和 $x^3+6x^2+16x+16$ 的最大公因式，求 $f(2)$。
(HKMO 1990/91 初賽個人)

答： $f(x)\,|\,(x^4+64)-x(x^3+6x^2+16x+16)=-6x^3-16x^2-16x+64$

即 $f(x)\,|\,3x^3+8x^2+8x-32$，

所以 $f(x)\,|\,(3x^3+8x^2+8x-32)-3(x^3+6x^2+16x+16)$

$f(x)\,|\,-10x^2-40x-80$

$f(x)\,|\,x^2+4x+8$

試除，得知 $f(x)$ 為兩式的因式，即最大公因式。

故 $f(2)=(2)^2+4(2)+8=20$。

5. 若 x^3+kx^2+3 除以 $x+3$，其餘數較被 $x+1$ 除所得的餘數少 2。求 k。
(HKMO 2001/02 初賽個人)

答： 令 $f(x)=x^3+kx^2+3$，

$f(-1)-f(-3) = 2$

$[(-1)^3+k(-1)^2+3]-[(-3)^3+k(-3)^2+3] = 2$

$-1+k+3+27-9k-3 = 2$

$-8k = -24$

$k = 3$

6. 若 x^4+4x^2+ax+b 能被 x^2+2x-3 整除，求 ab 的值。

答： 解法一：

設 $f(x)=x^4+4x^2+ax+b$

$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$

$f(-3) = (-3)^4+4(-3)^2+a(-3)+b = 0$

$3a-b = 117$ …(1)

$f(1) = (1)^3+4(1)^2+a(1)+b = 0$

$a+b = -5$ (2)

(1) + (2)： $4a = 112$

$a = 28$

從而得 $b = -33$

即 $ab = 28\times(-33) = -924$。

解法二：

$x^4+4x^2+ax+b = (x^2-2x+11)(x^2+2x-3)+(a-28)x+(b+33)$

由於整除的因素，故 $(a-28)x+(b+33)=0$。

即 $a=28, b=-33$，所以 $ab = 28\times(-33) = -924$。

7. 某多項式除以 $(x+1)$ 的餘數為 2，除以 $(x+2)$ 的餘數為 1，問多項式除以 $(x+1)(x+2)$ 的餘式為何？

答： 設多項式為 $p(x)$，除以 $(x-1)(x-2)$ 的商式為 $q(x)$ ，餘式為 $ax+b$ 。

$p(x) = q(x)(x-1)(x-2)+ax+b$

$p(-1) = q(-1)(-1+1)(-1+2)+a(-1)+b = 2$

$-a+b = 2$ ... (1)

$p(-2) = q(-2)(-2+1)(-2+2)+a(-2)+b = 1$

$-2a+b = 1$ ... (2)

(2) – (1)

$-a = -1$

a = 1

所以 b = 3

即餘式為 $x+3$ 。

8. 已知一個二次三項式 $f(x)$ 除以 $(x-1),(x-2),(x-3)$ 所得的餘數分別是 1, 3, 33，求 $f(x)$ 。

答： 設 $f(x)=ax^2+bx+c$ 。

$f(1) = a(1)^2+b(1)+c = a+b+c = 1$ ...(1)

$f(2) = a(2)^2+b(2)+c = 4a+2b+c = 3$ ...(2)

$f(3) = a(3)^2+b(3)+c = 9a+3b+c = 33$ ...(3)

(2) – (1)：

$2a+b = 2$ ...(4)

(3) – (1)：

$8a+2b = 32$

$4a+b = 16$ ...(5)

(5) – (4)：

$2a = 14$

a = 7

所以 b = -12，

即 $7-12+c = 1$

c = 6。

所以 $f(x) = 7x^2-12x+6$ 。

9. 因式分解 $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$。

代 $x=-y$ 上式為 $(-y+y+z)^3+y^3-y^3-z^3=0$，

故上式含因子 $(x+y)$。同理上式含因子$(y+z),(z+x)$。

故令上式 $=$ $K(x+y)(y+z)(z+x)$

代 $x=y=1,z=0$，得 $(2)(1)(1)K = 2^3-1^3-1^3-0^3$

$2K = 6$

$K = 3$

所以上式 $=$ $3(x+y)(y+z)(z+x)$

10. 因式分解 $(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3$。

答： 分解 $(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3$，代 $x^2=y^2$，得值 0，

即該式存有因式 x^2-y^2，同理亦存有因式 y^2-z^2 及 z^2-x^2。

由於該式為六次式，故可令該式 $=$ $A(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$

代 $x=0,y=1,z=2$，得

$(-1)^3+(-3)^3+(4)^3 = A(-1)(-3)(4)$

$A = \frac{36}{12} = 3$

所以 $(x^2-y^2)^3+(y^2-z^2)^3+(z^2-x^2)^3$

$= 3(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$

$= 3(x-y)(x+y)(y-z)(y+z)(z-x)(z+x)$。

不發生作用的東西是不會存在的。

德國哲學家、數學家

萊布尼茨

(Gottfried Wilhelm von Leibniz

1646-1716)

淺問

1. 設 C 為 $(1-x)(1+2x)(1-3x)\dots(1+14x)(1-15x)$ 的展開式中 x^2 的系數，求 $|C|$ 的值。（AIME 2004）

2. 若 $f(x)=x^{2008}-2008x+1$，求 $f(x)$ 除以下列各式的餘式。
（a） $x-1$ （b） $x+1$ （c） x^2-1

3. 若 $x^4+ax^3+2x^2+bx-2$ 能被 x^2-x-2 整除，求 ab 的值。

4. 求 $(x^2+5x+2)^3$ 除以 x^2+2x+3 的餘式。

5. 若 a 為實數且 $2a^3+a^2-275=0$，求 a 的值。（HKMO 1995/96 決賽個人）

6. 求三次方程 $f(x)$，使
（a） $f(1)=0, f(2)=-16, f(3)=-20, f(4)=0$。
（b） $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, f(4)=40$。

7. 求 $1997^{1990}-1991$ 被 1996 除所得的餘數。（HKMO 1990/91 初賽團體）

8. 設二次三項式 $x^2-ax-3b$ 及 $x^2+7ax+5b$ 的最大公因式為 $x+2$，試求兩式的最小公倍式。

9. 求 $x^4+2x^3-13x^2-14x+24$ 及 $x^4+6x^3+x^2-24x+16$ 的最大公因式及最小公倍式。

10. 化簡下列分式：
（a） $$\frac{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
（b） $$\frac{x^2(y^4-z^4)+y^2(z^4-x^4)+z^2(x^4-y^4)}{(y-z)(z-x)(x-y)}$$

11. 分解下列對稱多項式：
（a） $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$
（b） $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2$
（c） $(xy+yz+zx)^3-x^3y^3-y^3z^3-z^3x^3$

詳答

1. C 為 (-1)、(+2)、(-3)、. . . 、(-15)中任何兩個不相等的數的乘積之和。

$(-1+2-3+\ldots-15)^2 = (-1)^2+(+2)^2+(-3)^2+\ldots+(-15)^2+2C$

$(-8)^2 = (-1)^2+(+2)^2+(-3)^2+\ldots+(-15)^2+2C$

$64 = 1+4+9+\ldots+225+2C$

$64 = \frac{1}{6}(15)(15+1)(30+1)+2C$

$64 = 1240+2C$

$C = \frac{64-1240}{2} = -588$

所以 $|C| = 588$。

2. (a) 根據餘式定理：

餘數 $= f(1) = (1)^{2008}-2008(1)+1 = -2006$

(b) 根據餘式定理：

餘數 $= f(-1) = (-1)^{2008}-2008(-1)+1 = 2010$

(c) 試 $f(x)$ 除以 (x^2-1) 的商式為 $Q(x)$，餘式為 $cx+d$，

即 $f(x)=Q(x)(x^2-1)+cx+d$

$f(1) = Q(1)[(1)^2-1]+c(1)+d = -2006$

$c+d = -2006 \quad \cdots(1)$

$f(-1) = Q(1)[(-1)^2-1]+c(-1)+d = 2010$

$-c+d = 2010 \quad \cdots(2)$

(1)+(2) $2d = 4$

$d = 2$

而 $c = -2008$

所以餘式為 $-2008x+2$。

3. 設 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+bx-2$。因 $f(x)$ 可以整除 x^2-x-2，即 $f(x)$ 可以整除 $(x-2)$ 及 $(x+1)$。

$$
\begin{aligned}
f(2) &= (2)^4+a(2)^3+2(2)^2+b(2)-2 &&= 0\\
&\quad 16+8a+8+2b-2 &&= 0\\
&\quad 8a+2b &&= -22\\
&\quad 4a+b &&= -11 \quad \cdots(1)\\
f(-1) &= (-1)^4+a(-1)^3+2(-1)^2+b(-1)-2 &&= 0\\
&\quad 1-a+2-b-2 &&= 0\\
&\quad a+b &&= 1 \quad \cdots(2)
\end{aligned}
$$

(1) − (2) $3a = -12$

$a = -4$

而 $b = 5$

所以 $ab=(-4)(5)=-20$。

4. 令 $y=x^2+2x+3$，

$$
\begin{aligned}
\text{則 } (x^2+5x+2)^3 &= (y+3x-1)^3\\
&= y^3+3(3x-1)y^2+3(3x-1)^2y+(3x-1)^3
\end{aligned}
$$

由於上式右邊的前三項均可整除 $y=x^2+2x+3$，

故上式除以 $y=x^2+2x+3$ 的餘式等於末項除以 y 的餘式。

$$
\begin{aligned}
\text{末項} &= (3x-1)^3 = 27x^3-27x^2+9x-1\\
&= (x^2+2x+3)(27x-81)+90x+242
\end{aligned}
$$

故餘式為 $90x+242$。

5. 令 $f(a)=2a^3+a^2-275$，

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 2+1-275 &&= -272\neq 0\\
f(-1) &= -2+1-275 &&= -276\neq 0\\
f(5) &= 250+25-275 &&= 0
\end{aligned}
$$

故 $a=5$。

6. (a) 因為 $f(1)=f(4)=0$，所以設 $f(x)=a(x-b)(x-1)(x-4)$。

$$f(2) = a(2-b)(2-1)(2-4) = -16$$
$$a(2-b) = 8 \quad \cdots(1)$$
$$f(3) = a(3-b)(3-1)(3-4) = -20$$
$$a(3-b) = 10 \quad \cdots(2)$$
(2)/(1)
$$\frac{3-b}{2-b} = \frac{10}{8}$$
$$24-8b = 20-10b$$
$$b = -2$$
而
$$a = 2$$
所以 $f(x)=2(x-1)(x+2)(x-4)$。

(b) 令 $g(x)=f(x)-x$，而 $g(1)=g(2)=g(3)=0$，

所以 $g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)$，

而
$$f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)+x$$
$$f(4) = a(4-1)(4-2)(4-3)+4 = 40$$
$$6a+4 = 40$$
$$a = 6$$
所以
$$f(x) = 6(x-1)(x-2)(x-3)+x$$
$$= 6x^3-36x^2+67x-36$$ 。

7. 設 $f(x)=x^{1990}-1991$，$f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘數為

$f(-1) = (-1)^{1990}-1991 = 1 - 1991 = -1990$

現取 $x=1997$，$1997^{1990}-1991$ 被 1996 除所得的餘數是 -1990，

即 $1996-1990=6$。

8. 代 $x=-2$ 入二式：
$$(-2)^2-a(-2)-3b = 0$$
$$4+2a-3b = 0 \quad ...\ (1)$$
$$(-2)^2+7a(-2)+5b = 0$$
$$4-14a+5b = 0 \quad ...\ (2)$$
(1) - (2)：
$$16a-8b = 0$$
$$b = 2a \quad ...\ (3)$$
代 (3)入(1)：
$$4+2a-6a = 0$$
$$a = 1$$
所以 $b = 2$

即二式為 $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ 及 $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$，

所以兩式的最小公倍式為 $(x+2)(x-3)(x+5)$。

9. $(x^4+2x^3-13x^2-14x+24,\quad x^4+6x^3+x^2-24x+16)$

$$
\begin{aligned}
&= (x^4+2x^3-13x^2-14x+24,\ 4x^3+14x^2-10x-8)\\
&= (x^4+2x^3-13x^2-14x+24,\ 2x^3+7x^2-5x-4)\\
&= (3x^3+21x^2+24x-48,\quad 2x^3+7x^2-5x-4)\\
&= (x^3+7x^2+8x-16,\quad 2x^3+7x^2-5x-4)\\
&= (-7x^2-21x+28,\quad 2x^3+7x^2-5x-4)\\
&= (x^2+3x-4,\quad 2x^3+7x^2-5x-4)\\
&= x^2+3x-4
\end{aligned}
$$

所以最大公因式為 $x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$。

由於 $x^4+2x^3-13x^2-14x+24 = (x-1)(x+4)(x^2-x-6) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$

$x^4+6x^3+x^2-24x+16 = (x-1)(x+4)(x^2+3x-4) = (x-1)^2(x+4)^2$

所以最小公倍式 $(x-1)^2(x+2)(x-3)(x+4)^2$。

10. (a) 分解 $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$，

由於代 $a=-b$ 入原式，便得 0，故 $(a+b)$ 是一因式，

同理 $(b+c),(c+a)$ 亦為因式。

由於上式為三次式，故令上式為 $L(a+b)(b+c)(c+a)$。

比較 abc 的系數，得 $6=2L$，即 $L=3$。

故原式 $= \dfrac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = 3$。

(b) 分解 $x^2(y^4-z^4)+y^2(z^4-x^4)+z^2(x^4-y^4)$，

由於代 $x^2=y^2$ 入原式，便得 0，故 $(x-y)(x+y)$ 是一因式，

同理 $(y-z)(y+z),(z-x)(z+x)$ 亦為因式。

由於上式為六次式，故令上式為

$L(x-y)(x+y)(y-z)(y+z)(z-x)(z+x)$

比較 x^2y^4 的系數，得 $L=1$，

$$
\begin{aligned}
\text{故原式} &= \frac{(x-y)(x+y)(y-z)(y+z)(z-x)(z+x)}{(y-z)(z-x)(x-y)}\\
&= (x+y)(y+z)(z+x)
\end{aligned}
$$

11. (a) 由於代 $x=y$ 入原式，便得 0，故 $(x-y)$ 為一因式。

同理 $(y-z),(z-x)$ 亦為因式。

由於原式為三次式，故令原式為 $L(x-y)(y-z)(z-x)$。

代 $x=0,y=1,z=2$，得

$-2 = L(-1)(-1)(2) = 2L$，

即 $L=-1$，故原式為 $-(x-y)(y-z)(z-x)=(y-x)(z-y)(x-z)$。

(b) 由於代 $a=-b$ 入原式，便得 0，故 $(a+b)$ 為一因式。

同理 $(b+c),(c+a)$ 亦為因式。

由於原式為三次式，故令原式為 $L(a+b)(b+c)(c+a)$。

比較 abc 的系數，得

$6 = 2L$

即 $L=3$，故原式為 $3(a+b)(b+c)(c+a)$。

(c) 由於代 $x=0$ 入原式，便得 0，故 x 是一因式，

同理 y,z 亦為因式。

再代 $x=-y$ 入原式，亦得 0，故 $(x+y)$ 是一因式，

同理 $(y+z),(z+x)$ 亦為因式。

由於原式為六次式，所以令原式為 $Lxyz(x+y)(y+z)(z+x)$。

代 $x=y=z=1$ 入原式，得

$24 = 8L$

即 $L=3$，故原式為 $3xyz(x+y)(y+z)(z+x)$。

(d) 由於代 $a=b$ 入原式，便得 0，故 $(a-b)$ 是一因式，

同理 $(b-c),(c-a)$ 亦為因式。

由於原式為五次式，故令原式為

$(a-b)(b-c)(c-a)[M(ab+bc+ca)+N(a^2+b^2+c^2)$

代 $a=0,b=1,c=2$，得

$2(2M+5N) = (-1)^5+(-1)^5+(2)^5 = 30$

$2M+5N = 15 \quad \cdots(1)$

代 $a=0,b=1,c=3$，得

$6(3M+10N) = (-1)^5+(-2)^5+(3)^5 = 210$

$3M+10N = 35 \quad \cdots(2)$

(2)-(1)*2

$-M = 5$

M = -5

而 N = 5

即原式

$= (a-b)(b-c)(c-a)[-5(ab+bc+ca)+5(a^2+b^2+c^2)$

$= 5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$