「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

代數 － 二次方程

摘要

1. 解二次方程：

   二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

   (a) 若二次方程有實解，則 $\Delta=b^2-4ac\geq 0$。

   (b) 若二次方程有有理解，則 $\Delta=b^2-4ac$ 為一平方數。

2. 韋達（Viete）定理：

   若 α,β 為二次方程 $ax^2+bx+c=0$，

   則有 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ 及 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。

3. 理解二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的性質：

   (a) 若二次函數為一完全平方式，
   則 $\Delta=b^2-4ac=0$ 及 $a>0$。

   (b) 若二次函數可分解，
   則 $\Delta=b^2-4ac$ 為一完全平方數。

   (c) 若二次函數值恆為正（負），
   則 $\Delta=b^2-4ac<0$，及 $a>0$（$a<0$）。

   (d) 若二次函數值恆為非負（非正），
   則 $\Delta=b^2-4ac\leq 0$，及 $a>0$（$a<0$）。

4. 理解二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖像與系數的關係。

5. 利用重根條件，計算二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 給定斜率的切線方程。

6. 利用配方法或公式找出二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的最值：

   (a) 當 $a>0$，存在最小值 $x=-\dfrac{b}{2a}$，$y=-\dfrac{\Delta}{4a}$。

   (b) 當 $a<0$，存在最大值 $x=-\dfrac{b}{2a}$，$y=-\dfrac{\Delta}{4a}$。

拾例

1.　已知 $1-\sqrt{5}$ 滿足方程 $x^2+px+q=0$，其中 p,q 為有理數。若 $A=p+5q$，求 A 的值。

答：因為 $1-\sqrt{5}$ 滿足方程，所以 $1+\sqrt{5}$ 同樣滿足方程。

即 $p = -(1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}) = -2$，

$q = (1-\sqrt{5})\times(1+\sqrt{5}) = -4$

所以 $A = p+5q = (-2)+5(-4) = -22$。

2.　解方程 $(x-97)(x-79)=40$。

答：令 $y=x-79$，即得

$$\begin{aligned} y(y-18)-40 &= 0 \\ y^2-18y-40 &= 0 \\ (y-20)(y+2) &= 0 \end{aligned}$$

$y=20$ 或 $y=-2$

$x=20+79$ 或 $x=-2+79$

$x=99$ 或 $x=77$。

3.　解方程 $49x^2-21x-1=0$。

答：設 $y=7x$，原式化為 $y^2-3y-1=0$，

即 $y=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$，故 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{14}$。

4.　若 α,β 為二次方程的 $x^2-2x-1=0$ 的兩個實根，求下列各式的值：

(a)　$\alpha^2+\beta^2$

(b)　$\alpha^3+\beta^3$

(c)　$\alpha^2-\beta^2$

(d)　$\alpha^3+5\beta$

答：　由韋達定理可知：$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\ \alpha\beta=-1\end{cases}$。

(a)　$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = (4)^2-2(-1)$
$= 18$

(b)　$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
$= (4)(18-1) = 68$

(c)　$\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta = (4)^2-4(-1)$
$= 20$

(d)　由於 $\alpha^2=2\alpha+1$，

所以 $\alpha^3+5\beta = \alpha(2\alpha+1)+5\beta$
$= 2\alpha^2+\alpha+5\beta$
$= 2(2\alpha+1)+\alpha+5\beta$
$= 5\alpha+2+5\beta$
$= 5(\alpha+\beta)+2 = 5(4)+2$
$= 22$。

5.　a、b 為兩個不同之實數且 $a^2=6a+8$ 及 $b^2=6b+8$。求 $(\frac{4}{a})^2+(\frac{4}{b})^2$ 的值。（HKMO 1990/91 初賽個人）

答：　依題意，a、b 為方程 $x^2-6x-8=0$ 的兩根，

即有 $ab=-8$ 及 $a+b=6$。

$(\frac{4}{a})^2+(\frac{4}{b})^2 = 16(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}) = 16\times\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

$= 16\times\frac{(a+b)^2-2ab}{a^2b^2} = 16\times\frac{(-6)^2-2(8)}{(8)^2}$

$= 5$

（註：提示留意 $a\neq b$，若沒有此句，可以是 $a=b$ 為其中一根。）

6. 若方程 $x^2+2(1+a)x+3a^2+4ab+4b^2+2=0$ 有實根，求 a,b 的值。

答：
$$\begin{aligned}
\Delta = [2(1+a)]^2-4(1)(3a^2+4ab+4b^2+2) &\geq 0\\
4+8a+4a^2-12a^2-16ab-16b^2-8 &\geq 0\\
-8a^2-16ab-16b^2+8a-4 &\geq 0\\
2a^2+4ab+4b^2-2a+1 &\leq 0\\
(a-1)^2+(a+2b)^2 &\leq 0
\end{aligned}$$

即 $\begin{cases} a-1=0 \\ a+2b=0 \end{cases}$，解得 $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$ 。

7. 若方程 $x^2-kx-9=0$ 和 $x^2-7x-(k+2)=0$ 恰有一個公共根，求 k。

答：由於只有一公共根，故 $k\neq 7$ 。

設 a 為公共根，即

$$a^2-ka-9=0 \text{ 及 } a^2-7a-(k+2)=0$$

兩式相減，得
$$\begin{aligned}
-ka+7a-9+(k+2) &= 0\\
(7-k)a+(k-7) &= 0\\
(k-7)(1-a) &= 0
\end{aligned}$$

解得 $a=1$，代入後得 $k=-8$ 。

8. 求對稱軸平行於 y 軸，過點 (1, 0) 及 (9, 0) 並與直線 $y=3x$ 相切的拋　物線方程。

答：設拋物線方程為 $y=a(x-1)(x-9)$ 。

由於與 $y=3x$ 相切，

故
$$\begin{aligned}
ax^2-10ax+9a &= 3x\\
ax^2-(10a+3)x+9a &= 0
\end{aligned}$$

只有一解，即 $\Delta=0$ 。

$$\begin{aligned}
(10a+3)^2-4a(9a) &= 0\\
(10a+3-6a)(10a+3+6a) &= 0\\
(4a+3)(16a+3) &= 0
\end{aligned}$$

即 $a=-\dfrac{3}{4}$ 或 $a=-\dfrac{3}{16}$ 。

故得 $y=-\dfrac{3}{4}(x-1)(x-9)$， $3x^2-30x+4y+27=0$，

或 $y=-\dfrac{3}{16}(x-1)(x-9)$， $3x^2-30x+16y+27=0$ 。

9. 若 a,b 為方程 $x^2-2kx+k+6=0$ 的兩個實根，其中 k 為實數，求 a^2+b^2 的最小值。

答： 由韋達定理可知： $\begin{cases} a+b=2k \\ ab=k+6 \end{cases}$。

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ &= (2k)^2-2(k+6) \\ &= 4k^2-2k-12 \\ &= 4(k^2-\frac{1}{2}k)-12 \\ &= 4(k^2-\frac{1}{2}k+\frac{1}{4})-12-1 \\ &= 4(k-\frac{1}{2})^2-13 \end{aligned}$$

本來最小值為 -13。但得檢查當 $k=\frac{1}{2}$，所得的根是否為實根。

但 $\Delta = (-2k)^2-4(1)(k+6) \ge 0$

$$\begin{aligned} 4k^2-4k-24 &\ge 0 \\ k^2-k-6 &\ge 0 \\ (k-3)(k+2) &\ge 0 \end{aligned}$$

解得 $k\le -2$ 或 $k\ge 3$。

故 $k=\frac{1}{2}$ 不在實根之範圍。

測試 $k=-2$， $a^2+b^2 = 4(-2)^2-2(-2)-12 = 8$。

測試 $k=3$， $a^2+b^2 = 4(3)^2-2(3)-12 = 18$。

故 a^2+b^2 的最小值為 8，當 $k=-2$。

10. 已知 $x^2+y^2+4x-4y+32=0$，求 xy 的值。

答： $x^2+4x+16+y^2-4y+16 = 0$

$(x+4)^2+(y-4)^2 = 0$

故得 $x=-4, y=4$，即 $xy=(4)(-4)=-16$。

淺問

1. 若 α, β 為方程 $x^2-6x+4=0$ 的兩根，其中 $\alpha>\beta$，求
   (a) $\alpha^2+\beta^2$ (b) $\alpha^3+\beta^3$ (c) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$
   (d) $\alpha-\beta$ (e) $\alpha^2-\beta^2$ (f) $\alpha^3-\beta^3$

2. 若 α, β 為方程 $x^2-3x-3=0$ 的兩根，求 $\alpha^3+12\beta$。
   (HKMO 1992/93 初賽團體)

3. 設方程 $(x^2-11x-10)+k(x+2)=0$ 的其中一根為零，求另一根。
   (HKMO 1990/91 初賽個人)

4. 求下列方程的所有實根：
   (a) $x^2-3x+1=0$ (b) $2x^2+3x-5=0$

5. 求下列方程的所有實根：
   (a) $(x-234)(x-432)=400$ (b) $289x^2+34x-5=0$

6. 有甲、乙、丙三人，甲的年齡較乙和丙的年齡之和大 16，甲年齡的平方較乙和丙的年齡之和的平方大 1632，求甲、乙、丙的年齡之和。
   (HKMO 1991/92 初賽團體)

7. 若實數 x 滿足 $(x^2+4x)^2+4(x^2+4x)=21$，求 $x^2+4x+23$ 的值。

8. 已知方程 $x^2+kx+6=0$ 及 $x^2-kx+6=0$。若第二個方程的各根均比第一個方程的各對應根多 5，求 k 的值。(AHSME 1963)

9. 已知 $x^2+y^2+z^2-4x+6y-10z+38=0$，求 $x+y+z$ 的值。

10. 若方程 $x^2+bx+3=0$ 與方程 $x^2+3x+b=0$ 至少有一個實根相同，
    求實數 b 的值。

11. 設 x, y 為實數，求 $u=x^2+xy+y^2-x-2y$ 的最小值。

12. 設二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，當 $x=3$，得最大值 10，且它的圖象在 x 軸上截得的線段長 4，求 abc 的值。

詳答

1. (a) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = (6)^2-2(4) = 28$

   (b) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) = (6)^3-3(6)(4) = 144$

   (c) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

   (d) $\alpha-\beta = \sqrt{(\alpha-\beta)^2} = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = \sqrt{(6)^2-4(4)} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

   (e) $\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = 6\times 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$

   (f) $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2 = (\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta) = (2\sqrt{5})^3+3(4)(2\sqrt{5}) = 40\sqrt{5}+24\sqrt{5} = 64\sqrt{5}$

2. $\alpha^3+12\beta = \alpha(\alpha^2)+12\beta = \alpha(3\alpha+3)+12\beta = 3\alpha^2+3\alpha+12\beta = 3(3\alpha+3)+3\alpha+12\beta = 12(\alpha+\beta)+3 = 12\times 3+3 = 39$。

3. 代 $x=0$ 入方程，得 $-10+2k=0$，得 $k=5$。
   故原方程可改寫成 $(x^2-11x-10)+5(x+2) = 0$
   $x^2-6x = 0$
   解得 $x=0,6$，即另一根為 6。

4. (a) $x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。

   (b) 由於 $(2x+5)(x-1)=0$，故得 $x=-\dfrac{5}{2},1$。

5. (a) 設 $y=x-234$，則

$$\begin{aligned} y(y+198)-400 &= 0 \\ y^2+198y-400 &= 0 \\ (y+200)(y-2) &= 0 \end{aligned}$$

即得 $y=-200,2$，對應 $x=34,236$。

(b) 設 $y=17x$，原式改寫成 $y^2+2y-5=0$

即 $y = \dfrac{-2\pm\sqrt{24}}{2} = -1\pm\sqrt{6}$

所以 $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{6}}{17}$。

6. 設甲、乙、丙三人的年齡分別是 a, b, c。

$$\begin{cases} a=b+c+16 \\ a^2=(b+c)^2+1632 \end{cases}$$

綜合得 $(b+c+16)^2 = (b+c)^2+1632$

$$\begin{aligned} b^2+c^2+256+2bc+32b+32c &= b^2+2bc+c^2+1632 \\ b+c &= 43 \end{aligned}$$

所以三人年齡之和 $= 43+43+16 = 102$

7.
$$\begin{aligned} (x^2+4x)^2+4(x^2+4x)-21 &= 0 \\ (x^2+4x+7)(x^2+4x-3) &= 0 \end{aligned}$$

即 $x^2+4x+7=0$ 或 $x^2+4x-3=0$。

由於 $x^2+4x+7=0$ 沒有實數解，故得 $x^2+4x=3$。

所以 $x^2+4x+23=3+23=26$。

8. 設第一個方程的兩根分別為 r,s。

由韋達定理得 $r+s=-k$ 及 $rs=6$。

從第二個方程得 $\begin{cases} (r+5)+(s+5)=k \\ (r+5)(s+5)=6 \end{cases}$，即 $\begin{cases} r+s=k-10 \\ rs+5(r+s)-19=0 \end{cases}$

由 $r+s=-k$ 及 $r+s=k-10$，得 $-k=k-10$，解得 $k=5$。

9.
$$\begin{aligned} x^2-4x+4+y^2+6y+9+z^2-10z+25 &= 0 \\ (x-2)^2+(y+3)^2+(z-5)^2 &= 0 \end{aligned}$$

即 $x=2, y=-3, z=5$，所以 $x+y+z=2+(-3)+5=4$。

10. 令 x_0 為兩方程的其中一個相同實根，得

$$\begin{cases} x_0{}^2 + bx_0 + 3 = 0 \\ x_0{}^2 + 3x_0 + b = 0 \end{cases}$$

兩式相減，得

$$(b-3)x_0 + (3-b) = 0$$
$$(b-3)(x_0 - 1) = 0$$

即 $b=3$ 或 $x_0 = 1$。

若 $b=3$，兩方程均為 $x^2+3x+3=0$，此式沒有實根，與題意不符。

即取 $x_0 = 1$，代入任何一道方程，得 $b=-4$。

11.
$$\begin{aligned} u &= x^2 + (y-1)x + y^2 - 2y \\ &= (x+\frac{y-1}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{1}{4} \\ &= (x+\frac{y-1}{2})^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 - 1 \quad \geq \quad 1 \end{aligned}$$

所以當 $x=0, y=1$ 時 $u=1$ 為最小值。

12. $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-3)^2 + 10$。

另一方面，由於兩根相距為 4，故兩根為 1, 5，即

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-1)(x-5)$

所以有
$$\begin{aligned} a(x-3)^2 + 10 &= a(x-1)(x-5) \\ ax^2 - 6ax + 9a + 10 &= ax^2 - 6ax + 5a \\ 9a + 10 &= 5a \\ a &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

所以 $f(x) = -\frac{5}{2}(x-3)^2 + 10 = -\frac{5}{2}x^2 + 15x - \frac{25}{2}$，

即 $a = -\frac{5}{2}, b = 15, c = -\frac{25}{2}$，所以 $abc = (-\frac{5}{2})(15)(-\frac{25}{2}) = \frac{1875}{4}$。