「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

代數 － 分式

摘要

1. 部分分式
   把真分式分解為以低次因式為分母的分式總和，
   再以待定系數法計算分子：
   (a) 分母沒有重覆因子
   $$\frac{p(x)}{(ax^2+bx+c)(dx+e)(fx+g)}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{C}{dx+e}+\frac{D}{fx+g}$$
   (b) 分母有重覆因子
   $$\frac{p(x)}{(ax+b)^n}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+\frac{C}{(ax+b)^3}+\ldots+\frac{K}{(ax+b)^{n-1}}$$
2. 分式運算、化簡。
3. 解分式方程，留意分式的定義域，即分母非零。
4. 求分式的值域：
   對於分式 $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ 的值域，再令 $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ ，
   再轉化為 x 的二次方程 $(a-dy)x^2+(b-ey)x+(c-fy)=0$ ，
   定此式的 $\Delta=(b-ey)^2-4(a-dy)(c-ey)\geq 0$，解出 y 的值域。

拾例

1. 已知 $\frac{2x-3}{x^2-x}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x}$，其中 A 和 B 是常數。若 $S=A^2+B^2$，求 S 的值。（HKMO 2005/06 決賽個人）

答： $Ax+B(x-1)=2x-3$，即得 $\begin{cases}A+B=2\\ B=3\end{cases}$，解得 $A=-1, B=3$。

S = $(-1)^2+(3)^2$ = 10。

2. 把 $\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ 化為部分分式。

答： 令 $\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$，

即 $A(x-2)(x-3)+B(x-3)(x-1)+C(x-1)(x-2) = x^2+2x+3$

代 $x=1$，

得 $2A = 6$

A = 3

代 $x=2$，

得 -B = 9

B = -9

代 $x=3$，

得 $2C = 18$

C = 9

所以 $\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3}{x-1}-\frac{9}{x-2}+\frac{9}{x-3}$。

3. 化簡 $\frac{1}{x^2+5x+6}+\frac{1}{x^2+7x+12}+\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}$。

答： 原式 $=\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}$

$=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}$

$=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+6} = \frac{(x+6)-(x+2)}{(x+2)(x+6)}$

$=\frac{4}{(x+2)(x+6)}$

4. 若 $x+\frac{1}{x}=7$，求下列各式的值。

(a) $x^2+\frac{1}{x^2}$

(b) $x^3+\frac{1}{x^3}$

(c) $x^5+\frac{1}{x^5}$

答：(a) $x^2+\frac{1}{x^2} = (x+\frac{1}{x})^2-2 = (7)^2-2$
$= 47$。

(b) $x^3+\frac{1}{x^3} = (x+\frac{1}{x})(x^2-2+\frac{1}{x^2}) = (x+\frac{1}{x})[(x+\frac{1}{x})^2-4]$
$= 7\times(7^2-4) = 315$。

(c) 考慮 $(x^2+\frac{1}{x^2})(x^3+\frac{1}{x^3}) = 47\times315$

$x^5+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5} = 14805$

$x^5+7+\frac{1}{x^5} = 14805$

$x^5+\frac{1}{x^5} = 14798$。

5. 已知 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$，$\frac{x}{x^2-1}=b$，求 b 的值。

答：$\frac{1}{b} = \frac{x^2-1}{x} = x-\frac{1}{x} = \pm\sqrt{(x+\frac{1}{x})^2-4}$
$= \pm\sqrt{7-4} = \pm\sqrt{3}$。

所以 b $= \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。

6. 已知 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6$，求 $\frac{x-2xy+y}{x+2xy+y}$ 的值。

答：由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=6$，得 $x+y=6xy$，代入原式，得：

原式 $= \frac{(x+y)-2xy}{(x+y)+2xy} = \frac{(6xy)-2xy}{(6xy)+2xy} = \frac{4xy}{8xy}$
$= \frac{1}{2}$

7. 求下列方程的最小實根：

$$\frac{x}{(x-4)(x+3)}=\frac{x}{(x+4)(x-6)}$$ （HKMO 1997/98 初賽個人）

答： 顯然 $x=0$ 為方程一根，若 $x\neq 0$ 則有

$(x-4)(x+3) = (x+4)(x-6)$

$x^2-x-12 = x^2-2x-24$

x = −12

所以最小實根為 −12。

8, 解方程 $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+6}{x+7}=\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+5}{x+6}$ 。

答： $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+5}{x+6} = \frac{x+2}{x+3}-\frac{x+6}{x+7}$

$1+\frac{1}{x+2}-1-\frac{1}{x+6} = 1+\frac{1}{x+3}-1-\frac{1}{x+7}$

$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+6} = \frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+7}$

$\frac{x+6-x-2}{(x+2)(x+6)} = \frac{x+7-x-3}{(x+3)(x+7)}$

$\frac{4}{(x+2)(x+6)} = \frac{4}{(x+3)(x+7)}$

$x^2+8x+12 = x^2+10x+21$

$2x+9 = 0$

x = $-\frac{9}{2}$ 。

9. 解方程 $\dfrac{x^2+4x}{x-1}+\dfrac{72x-7x}{x^2+4x}-18=0$

答： 令 $y=\dfrac{x^2+4x}{x-1}$，則原式化簡

$$
\begin{aligned}
y+\frac{72}{y}-18 &= 0\\
y^2-18y+72 &= 0\\
(y-6)(y-12) &= 0
\end{aligned}
$$

得解 y	=	6	或	y	=	12
$\dfrac{x^2+4x}{x-1}$	=	6	或	$\dfrac{x^2+4x}{x-1}$	=	12
x^2-2x+6	=	0	或	$x^2-8x+12$	=	0
無實根			或	$x=2,6$		

所以得解 $x=2,6$。

10. x,y 為實數且滿足 $y=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$，求 y 的最大值及最小值。

答： 令 $\dfrac{2x}{x^2+x+1}=y$

即 $2x = y(x^2+x+1)$

$yx^2-(y-2)x+y = 0$

由於 y 的存在，故使上式的

$$
\begin{aligned}
\Delta = (-y+2)^2-4(y)(y) &\geq 0\\
y^2-4y+4-4y^2 &\geq 0\\
3y^2+4y-4 &\leq 0\\
(3y-2)(y+2) &\leq 0
\end{aligned}
$$

所以得解 $-2\leq y\leq\dfrac{2}{3}$。

所以 y 的最大值為 $\dfrac{2}{3}$，最小值為 -2。

淺問

1. 若 $\dfrac{2x+1}{(x+1)(x+2)} \equiv \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2}$，求 A、B 的值。

2. 把下列分式分解成部分分式：

   (a) $\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)(x+2)(x+4)}$　　(b) $\dfrac{5x^3}{(x-1)^4}$

3. 化簡 $\dfrac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}} + \dfrac{1}{1+x^{c-b}+x^{a-b}} + \dfrac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}$。(BBMO 2011)

4. 若 $a=\dfrac{x}{y+z}, b=\dfrac{y}{z+x}, c=\dfrac{z}{x+y}$，求 $\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}$ 的值。

5. 設 $x=\dfrac{1}{x}$，求 $\dfrac{x^2+2x-3}{x-1} \div \dfrac{x+5}{x^2+3x-6}$ 的值。(HKMO 1996/97 初賽個人)

6. 若 $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{2004}{2005}$，求 $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}$ 的值。
(HKPSC 2004)

7. 解下列方程：

   (a) $\dfrac{x}{(x+2)(x-12)} = \dfrac{x}{(x+3)(x-8)}$

   (b) $\dfrac{x+2}{2x+1} + \dfrac{2x+1}{x+2} = 2$

   (c) $\dfrac{1}{x^2+11x-8} + \dfrac{1}{x^2+2x-8} + \dfrac{1}{x^2-13x-8} = 0$

8. 若 $x+\dfrac{1}{x}=10$，求下列各式的值：

   (a) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(b) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

9. 求下列函數的取值範圍：

   (a) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$　　(b) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

詳答

1. $2x-1 = A(x+2)+B(x+1)$

代 $x=-1$，得 $A=-3$；代 $x=-2$，得 $-B=-5$，即 $B=5$。

2. (a) 令 $\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)(x+2)(x+4)} \equiv \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+4}$

即 x^2+2x+3

$= A(x+2)(x+4)+B(x+4)(x+1)+C(x+1)(x+2)$

代 $x=-1$，得 $3A = 2$

$A = \dfrac{2}{3}$

代 $x=-2$，得 $-2B = 3$

$B = -\dfrac{3}{2}$

代 $x=-4$，得 $6C = 11$

$C = \dfrac{11}{6}$

所以 $\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)(x+2)(x+4)} \equiv \dfrac{2}{3(x+1)}-\dfrac{3}{2(x+2)}+\dfrac{11}{6(x+4)}$

(b) 令 $\dfrac{5x^3}{(x-1)^4} \equiv \dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)^3}+\dfrac{D}{(x-1)^4}$

即 $5x^3 = A(x-1)^3+B(x-1)^2+C(x-1)+D$

代 $x=1$，得 $D=5$；

$\dfrac{5x^3-5}{x-1} = A(x-1)^2+B(x-1)+C$

$5x^2+5x+5 = A(x-1)^2+B(x-1)+C$

代 $x=1$，得 $C=15$；

$\dfrac{5x^2+5x-10}{x-1} = A(x-1)+B$

$5x+10 = A(x-1)+B$

代 $x=1$，得 $B=15$； 而 $A=\dfrac{5x-5}{x-1}=5$。

所以 $\dfrac{5x^3}{(x-1)^4} \equiv \dfrac{5}{x-1}+\dfrac{15}{(x-1)^2}+\dfrac{15}{(x-1)^3}+\dfrac{5}{(x-1)^4}$

3. 原式 $= \dfrac{x^a}{x^a+x^b+x^c}+\dfrac{x^b}{x^a+x^b+x^c}+\dfrac{x^c}{x^a+x^b+x^c}$

$= \dfrac{x^a+x^b+x^c}{x^a+x^b+x^c} = 1$。

4. $\dfrac{1}{a}=\dfrac{y+z}{x},\dfrac{1}{b}=\dfrac{z+x}{y},\dfrac{1}{c}=\dfrac{x+y}{z}$，

原式 $= \dfrac{1}{1+\frac{1}{a}}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{b}}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{c}} = \dfrac{1}{1+\frac{y+z}{x}}+\dfrac{1}{1+\frac{z+x}{y}}+\dfrac{1}{1+\frac{x+y}{z}}$

$= \dfrac{x}{x+y+z}+\dfrac{y}{x+y+z}+\dfrac{z}{x+y+z}$

$= \dfrac{x+y+z}{x+y+z} = 1$。

5. 由 $x=\dfrac{1}{x}$，得 $x^2=1$，即 $x=\pm1$。但原式中 $x\neq1$，故取 $x=-1$ 代入原式，便得

$$\frac{1-2-3}{-1-1}\div\frac{-1+5}{1-3-6} = \frac{-4}{-2}\times\frac{-8}{4} = -4\text{。}$$

6. 令 $x=a+b, y=b+c, z=c+a$，

$$\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz} = \frac{2004}{2005}$$

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} &= \frac{x-y+z}{2x}+\frac{y-z+x}{2y}+\frac{z-x+y}{2z} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{y-z}{2x}+\frac{1}{2}-\frac{z-x}{2y}+\frac{1}{2}-\frac{x-y}{2z} \\
&= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right) \\
&= \frac{3}{2}-\frac{yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)}{2xyz} \\
&= \frac{3}{2}-\frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{2xyz} \\
&= \frac{3}{2}-\frac{1002}{2005} = \frac{4011}{4010}
\end{aligned}$$

7. (a) $\dfrac{x}{(x+2)(x-12)} = \dfrac{x}{(x+3)(x-8)}$

顯然易見 $x=0$，為方程的一根。

若 $x \neq 0$，則有

$$(x+2)(x-12) = (x+3)(x-8)$$
$$x^2-10x-24 = x^2-5x-24$$
$$5x = 0$$
$$x = 0$$

故方程的唯一解是 $x=0$。

(b)
$$\frac{x+2}{2x+1}+\frac{2x+1}{x+2} = 2$$
$$\frac{(x+2)^2-2(x+2)(2x+1)+(2x+1)^2}{(x+2)(2x+1)} = 0$$
$$[(x+2)-(2x+1)]^2 = 0$$
$$-x+1 = 0$$
$$x = 1$$

(c) 令 $y=x^2+2x-8$，則原式化簡

$$\frac{1}{y+9x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y-15x} = 0$$
$$y(y-15x)+(y+9x)(y-15x)+y(y+9x) = 0$$
$$y^2-15xy+y^2+9xy-15xy-135x^2+y^2+9xy = 0$$
$$3y^2-12xy-135x^2 = 0$$
$$y^2-4xy-45x^2 = 0$$
$$(y+5x)(y-9x) = 0$$

得解 $y = -5x$ 或 $y = 9x$

$x^2+2x-8 = -5x$ 或 $x^2+2x-8 = 9x$

$x^2+7x-8 = 0$ 或 $x^2-7x-8 = 0$

$(x+8)(x-1) = 0$ 或 $(x-8)(x+1) = 0$

所以 $x=\pm1,\pm8$。

8. (a) $(x+\frac{1}{x})^2 = 100$

$x^2+2+\frac{1}{x^2} = 100$

所以 $x^2+\frac{1}{x^2} = 98$。

(b) $x^3+\frac{1}{x^3} = (x+\frac{1}{x})(x^2-1+\frac{1}{x^2})$

$= 10\times(98-1) = 970$。

9. (a) 令 $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} = y$

即 $x^2+x+1 = y(x^2+1)$

$(y-1)x^2-x+(y-1)=0$

由於 y 的存在，故使上式的

$$\begin{aligned}\Delta = (-1)^2-4(y-1)(y-1) &\geq 0\\ 1-4y^2+8y-4 &\geq 0\\ 4y^2-8y+3 &\leq 0\\ (2y+1)(2y-3) &\leq 0\end{aligned}$$

所以得解 $\frac{1}{2}\leq y\leq\frac{3}{2}$。

(b) 令 $\frac{x^2+x+1}{x+1} = y$

即 $x^2+x+1 = y(x+1)$

$x^2+x(1-y)+(1-y)=0$

由於 y 的存在，故使上式的

$$\begin{aligned}\Delta = (1-y)^2-4(1)(1-y) &\geq 0\\ (1-y)[(1-y)-4] &\geq 0\\ (y-1)(y+3) &\geq 0\end{aligned}$$

所以得解 $y\leq -3$ 或 $y\geq 1$。