「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

代數 － 根式

摘要

1.　根式的定義域、值域及相關最值問題：

(a)　$\sqrt{ax-b}$ 的值域為全體非負實數，定義域 $ax-b\ge 0$。

(b)　$y=Ax+B+C\sqrt{ax^2+bx+c}$ 的值域：

$(y-Ax-B)^2=C^2(ax^2+bx+c)$ 展開後得出 x 的二次式。
再從判別式解出 y 的值域。

(c)　利用相似三角形法求 $y=\sqrt{(x+a)^2+b^2}+\sqrt{(x+c)^2+d^2}$
的最小值。

2.　解含有根式的方程。

3.　運用根值的對應最小多項式作求值運算。

拾例

1. 已知 $f(x)=(x^4+2x^3+4x-5)^{2004}+2004$。若 $f(\sqrt{3}-1)=d$，求 d 的值。（HKMO 2003/04 決賽團體）

答： 令 $a=\sqrt{3}-1$，

則 $(a+1)^2 = 3$

$a^2+2a+1 = 3$

$a^2+2a-2 = 0$

由於 $a^4+2a^3+4a-5 = (a^2+2)(a^2+2a-2)-1$

所以 $f(\sqrt{3}-1) = (-1)^{2004}+2004 = 2005$。

2. 已知 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$，求 $x^4-22x^2-48x+2$ 的值。

答：

$x-\sqrt{2} = \sqrt{3}+\sqrt{6}$

$x^2-2\sqrt{2}x+2 = 3+2\sqrt{18}+6$

$x^2-2\sqrt{2}x = 7+6\sqrt{2}$

$x^2-7 = 2\sqrt{2}(x+3)$

$x^4-14x^2+49 = 8x^2+48x+72$

$x^4-22x^2-48x = 23$

所以上式 $= 23+2 = 25$。

3. 已知 $x=\sqrt[3]{2(\sqrt{3}+1)}-\sqrt[3]{2(\sqrt{3}-1)}$，求 x^3+6x 的值。

答： 原式的立方

$= (\sqrt[3]{2(\sqrt{3}+1)})^3-(\sqrt[3]{2(\sqrt{3}-1)})^3$

$-3(\sqrt[3]{2(\sqrt{3}+1)})(\sqrt[3]{2(\sqrt{3}-1)})(\sqrt[3]{2(\sqrt{3}+1)}-\sqrt[3]{2(\sqrt{3}-1)})$

$= 2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}+2-3\sqrt[3]{4(3-1)}x$

$= 4-6x$

即 $x^3+6x=4$。

4. 解方程 $\sqrt{3x^2-4x+5}=2x-3$。

答： $3x^2-4x+5 = 4x^2-12x+9$

$x^2-8x+4 = 0$

$x = \dfrac{8\pm\sqrt{64-16}}{2} = \dfrac{8\pm\sqrt{48}}{2}$

$= 4\pm2\sqrt{3}$。

由於 $2(4-2\sqrt{3})-3 = 5-4\sqrt{3} < 0$

不合根值定義，故捨去。即只得一解 $x=4+2\sqrt{3}$。

5. 解方程 $2x^2+2x+\sqrt{x^2+x+3}=15$。

答： 設 $y=\sqrt{x^2+x+3}$，則

$2y^2+y-6 = 15$

$2y^2+y-21 = 0$

解得 $y=3$ 或 $y=-\dfrac{7}{2}$（捨去）

即 $\sqrt{x^2+x+3} = 3$

$x^2+x+3 = 9$

$x^2+x-6 = 0$

解得 $x=-3,2$。

6. 若 $x \neq 0$ 且滿足 $\sqrt[3]{(27-x)^2}+\sqrt[3]{(64-x)^2}=37-\sqrt[3]{(27-x)(64-x)}$，求 x 的值。

答： 設 $A=\sqrt[3]{27-x}, B=\sqrt[3]{64-x}$，則有

$$
\begin{aligned}
A^2+B^2 &= 37-AB \\
A^2+AB+B^2 &= 37 \\
\frac{A^3-B^3}{A-B} &= 37 \\
\frac{(27-x)-(64-x)}{A-B} &= 37 \\
\frac{-37}{A-B} &= 37 \\
B-A &= 1 \\
B &= 1+A
\end{aligned}
$$

代入 $A^2+AB+B^2=37$，得

$$
\begin{aligned}
A^2+A(1+A)+(1+A)^2 &= 37 \\
A^2+A+A^2+1+2A+A^2 &= 37 \\
3A^2+3A-36 &= 0 \\
A^2+A-12 &= 0
\end{aligned}
$$

解得 $A=-4$ 或 $A=3$

即 $27-x=-64$ 或 $27-x=27$

$x=91$ 或 $x=0$（捨去）

7. 解方程 $\sqrt{x^2-5x+13}+\sqrt{x^2-5x+5}=4$。

答：

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{x^2-5x+13})^2-(\sqrt{x^2-5x+5})^2 &= (x^2-5x+13)-(x^2-5x+5) \\
&= 8
\end{aligned}
$$

把上式除以原式，得 $\sqrt{x^2-5x+13}-\sqrt{x^2-5x+5}=2$

因而解得 $\sqrt{x^2-5x+13}=3$ 及 $\sqrt{x^2-5x+5}=1$

由

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2-5x+8} &= 3 \\
x^2-5x+13 &= 9 \\
x^2-5x+4 &= 0 \\
(x-1)(x-4) &= 0
\end{aligned}
$$

解得 $x=1$ 或 $x=4$。

8. 方程 $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=2$ 的最小實數解可以寫成最簡分數 $\frac{a}{b}$ ，求 $a+b$ 的值。（FWMT-J 2006）

答： $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}-2\sqrt{x-1}$

$\sqrt{x+1} = 3\sqrt{x-1}$

$x+1 = 9x-9$

$x = \frac{5}{4}$

即 $a=5, b=4$ ，所以 $a+b=5+4=9$ 。

9. 求 $y=\sqrt{x^2+4x+13}+\sqrt{x^2-8x+41}$ 的最小值。

答： 原式 $= \sqrt{x^2+4x+4+9}+\sqrt{x^2-8x+16+25}$

$= \sqrt{(x+2)^2+3^2}+\sqrt{(x-4)^2+5^2}$

故此式等同兩直角三角形的斜邊的總和，

一三角形的兩邊為 $3,(x+2)$ 和另一三角形的兩邊為 $5,(x-4)$

若根式取最小值，即兩直角三角形相似，

即 $\frac{3}{x+2} = \frac{5}{x-4}$ 或 $\frac{3}{x+2} = \frac{5}{4-x}$

$3x-12 = 5x+10$ 　　 $12-3x = 5x+10$

$x = -11$（捨去） $x = \frac{1}{4}$

故最小值為 $\sqrt{(\frac{1}{4}+2)^2+3^2}+\sqrt{(4-\frac{1}{4})^2+5^2}$

$= \sqrt{\frac{81}{16}+9}+\sqrt{\frac{225}{16}+25} = \sqrt{\frac{225}{16}}+\sqrt{\frac{625}{16}}$

$= \frac{15}{4}+\frac{25}{4} = 10$

10. 已知 $(a-20)^2+\sqrt{b+10}+\frac{c^2}{2010}=0$ 。若 $M=20ab-10bc$ ，求 M 的值。（HKMHASC 2009/10）

答： 即解 $\begin{cases} a-20=0 \\ b+10=0 \\ c=0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} a=20 \\ b=-10 \\ c=0 \end{cases}$ 。

即 M $= 20(20)(-10)-10(-10)(0) = -4000$ 。

淺問

1. 設 $x=1+\sqrt{2}$，求 $x^5-2x^4+3x^3-4x^2-10x-6$ 的值。
(HKMO 2008/09 初賽團體)

2. 若 b 為 $\sqrt{14}$ 的小數部分，求 $b^4+12b^3+37b^2+6b-20$。

3. 設 $x=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$，求 $\dfrac{x^4-x^3-9x^2-5x+5}{x^2-4x+3}$ 的值。

4. 設 $x>0, y>0$ 且 $\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=3\sqrt{y}(\sqrt{x}+5\sqrt{y})$。若
$b=\dfrac{2x+\sqrt{xy}+3y}{x+\sqrt{xy}-y}$，求 b 的值。(HKMO 2001/02 決賽團體)

5. 若 $x=\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})$，且 $a,b>0$，求 $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$ 的值。

6. 若 a 為方程 $\sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=71$ 的最小實數解，求 a 的值。(HKMO 2003/04 決賽團體)

7. 求 $x^2+18x+30=2\sqrt{x^2+18x+45}$ 的所有實數解的乘積。(AIME 1983)

8. 解方程下列根方程
(a) $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}-\sqrt{2x+8}=0$。
(b) $\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$。

9. 設 a 為方程 $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}=\dfrac{5}{2}$ 的正根，求 a 的值。
(HKMO 1997/98 初賽個人)

10. 如果 $4(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2})=x+y+z+9$，求 xyz 的值。
(中國江西省南昌市初中數學競賽 1991)

11. 求 $y=2x+\sqrt{6-x}$ 的最大值。

12. 求 $y=\sqrt{x^2+6x+13}+\sqrt{x^2-10x+41}$ 的最小值。

詳答

1. $x=1+\sqrt{2}$，$(x-1)^2=2$，得 $x^2-2x-1=0$ 。

$$
\begin{aligned}
& x^5-2x^4+3x^3-4x^2-10x-6 \\
= \quad & (x^2-2x-1)(x^3+4x+4)+2x-2 \\
= \quad & 2x-2 \quad = \quad 2(1+\sqrt{2})-2 \quad = \quad 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

2. $b=\sqrt{14}-3$，即 $b+3=\sqrt{14}$，$b^2+6b+9=14$，$b^2+6b=5$ 。

原式 $= b^4+12b^3+36b^2+b^2+6b-20$

$= (b^2+6b)^2+(b^2+6b)-20$

$= 5^2+5-20 \quad = \quad 10$

3. x $= \sqrt{7+2\sqrt{12}} \quad = \quad \sqrt{(3+4)+2\sqrt{3\times 4}} \quad = \quad \sqrt{4}+\sqrt{3}$

$= 2+\sqrt{3}$

所以 $(x-2)^2=3$，即 $x^2-4x+1=0$ 。

故 $\dfrac{x^4-x^3-9x^2-5x+5}{x^2-4x+3} \quad = \quad \dfrac{(x^2-4x+1)(x^2+3x+2)+3}{x^2-4x+1+2}$

$= \dfrac{3}{2}$ 。

4.

$$
\begin{aligned}
x+\sqrt{xy} &= 3\sqrt{xy}+15y \\
x-2\sqrt{xy}-15y &= 0 \\
(\sqrt{x}-5\sqrt{y})(\sqrt{x}+3\sqrt{y}) &= 0
\end{aligned}
$$

$\sqrt{x}=5\sqrt{y}$ 或 $\sqrt{x}=-3\sqrt{y}$（捨去）

即 $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=5$ 。

b $= \dfrac{\dfrac{2x}{y}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}+3}{\dfrac{x}{y}+\sqrt{\dfrac{x}{y}}-1} \quad = \quad \dfrac{2(5)^2+(5)+3}{(5)^5+(5)-1} \quad = \quad \dfrac{58}{29}$

$= 2$

5. x $= \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}}{\sqrt{ab}}) = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$

原式 $= \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{(2a\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)}{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)}$

$$= \frac{2a(1+x^2)-2ax\sqrt{1+x^2}}{1+x^2-x^2}$$

$$= 2a(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})$$

$$= 2a[1+(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}})^2-(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}})\sqrt{1+(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}})^2}]$$

$$= 2a[1+\frac{(a-b)^2}{4ab}-(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}})\sqrt{1+\frac{(a-b)^2}{4ab}}]$$

$$= 2a[1+\frac{(a-b)^2}{4ab}-(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}})\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2+4ab}{4ab}}]$$

$$= 2a[1+\frac{(a-b)^2}{4ab}-(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}})\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}}]$$

$$= 2a[1+\frac{(a-b)^2}{4ab}-(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}})(\frac{a+b}{2\sqrt{ab}})]$$

$$= 2a[1+\frac{(a-b)^2}{4ab}-\frac{a^2-b^2}{4ab}]$$

$$= 2a\times\frac{4ab+a^2-2ab+b^2-a^2+b^2}{4ab}$$

$$= 2a\times\frac{2ab+2b^2}{4ab} = 2a\times\frac{2b(a+b)}{4ab}$$

$$= a+b$$

6. 由於 $x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+3x)(x^2+3x+2)$

$= (x^2+3x+1-1)(x^2+3x+1+1) = (x^2+3x)^2-1$

所以 $71 = \sqrt{(x^2+3x+1)^2-1+1} = x^2+3x+1$

即 $x^2+3x-70 = 0$

$(x+10)(x-7) = 0$

所以解得 $x=-10,7$，故最小實數解為 -10。

7. 原式化簡為

$$(x^2+18x+45)-2\sqrt{x^2+18x+45}-15=0$$

解得 $\sqrt{x^2+18x+45}=5$ 或 $\sqrt{x^2+18x+45}=-3$（捨去）

得 $x^2+18x+20=0$，實根乘積 = 20。

8. (a)

$$\sqrt{3x-3}-\sqrt{2x+8} = -\sqrt{5x-19}$$
$$3x-3+2x+8-2\sqrt{(3x-3)(2x+8)} = 5x-19$$
$$\sqrt{(3x-3)(2x+8)} = 12$$
$$6x^2+18x-24 = 12$$
$$x^2+3x-28 = 0$$
$$(x+7)(x-4) = 0$$

解得 $x=4$ 或 $x=-7$（捨去）。

(b)

$$(\sqrt{3x^2-4x+34})^2-(\sqrt{3x^2-4x-11})^2$$
$$= (3x^2-4x+34)-(3x^2-4x-11)$$
$$= 45$$

把上式除以原式，得 $\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}=5$

因而解得 $\sqrt{3x^2-4x+34}=7$ 及 $\sqrt{3x^2-4x-11}=2$

由

$$\sqrt{3x^2-4x+34} = 7$$
$$3x^2-4x+34 = 49$$
$$3x^2-4x-15 = 0$$
$$(3x+5)(x-3) = 0$$

解得 $x=-\dfrac{5}{3}$ 或 $x=3$。

9.

$$\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{5}{2}$$
$$\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}\right)^2 = \frac{25}{4}$$
$$\frac{x+2}{x-1}+2+\frac{x-1}{x+2} = \frac{25}{4}$$
$$\frac{(x+2)^2+2(x-1)(x+2)+(x-1)^2}{(x-1)(x+2)} = \frac{25}{4}$$
$$4(x+2)^2-17(x-1)(x+2)+4(x-1)^2 = 0$$
$$[4(x+2)-(x-1)][(x+2)-4(x-1)] = 0$$
$$(3x+9)(-3x+6) = 0$$

$x=-3$（捨去）或 $x=2$。故 $a=2$。

10. 原方程化為

$$4(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}) = \sqrt{x^2}+\sqrt{(y-1)^2}+\sqrt{(z-2)^2}+12$$

$$(\sqrt{x})^2-4\sqrt{x}+4+(\sqrt{y-1})^2-4\sqrt{y-1}+4+(\sqrt{z-2})^2-4\sqrt{z-2}+4 = 0$$

$$(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{y-1}-2)^2+(\sqrt{z-2}-2)^2 = 0$$

即得 $\sqrt{x}-2=0$ 及 $\sqrt{y-1}-2=0$ 及 $\sqrt{z-2}-2=0$

解得 $x=4$ 及 $y=5$ 及 $z=6$

所以 $xyz = 4\times5\times6 = 120$

11. 設 $t=\sqrt{6-x}$，即 $x=6-t^2$。

得 y $= 2(6-t^2)+t = -2t^2+t+12$

$= -2(t^2+\frac{t}{2})+12 = -2(t^2+\frac{t}{2}+\frac{1}{16})+12+\frac{1}{8}$

$= -2(t+\frac{1}{4})^2+\frac{97}{8}$。

故當 $t=\frac{1}{4}$，即 $x=6-(\frac{1}{4})^2=\frac{95}{16}$ 時，y 達最大值 $\frac{97}{8}$。

12. 原式 $= \sqrt{x^2+6x+9+4}+\sqrt{x^2-10x+25+16}$

$= \sqrt{(x+3)^2+2^2}+\sqrt{(x-5)^2+4^2}$

故此式等同兩直角三角形的斜邊的總和，

一三角形的兩邊為 $2,(x+3)$ 和另一三角形的兩邊為 $4,(x-5)$

若根式取最小值，即兩直角三角形相似，

即 $\frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-5}$ 或 $\frac{2}{x+3} = \frac{4}{5-x}$

$2x-10 = 4x+12$　　$10-2x = 4x+12$

x = -11（捨去）　　x $= -\frac{1}{3}$

故最小值為 $\sqrt{(-\frac{1}{3}+3)^2+2^2}+\sqrt{(5+\frac{1}{3})^2+4^2}$

$= \sqrt{\frac{64}{9}+4}+\sqrt{\frac{256}{9}+16} = \sqrt{\frac{100}{9}}+\sqrt{\frac{400}{9}}$

$= \frac{10}{3}+\frac{20}{3} = 10$