「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

代數 – 絕對值與循環方程組

摘要

1. 解含有絕對值的方程或方程組
   (a) 以 $|x| = a, x = \pm a$ 的性質。
   (b) 以區間法。
2. 求絕對值算式的最值。
3. 運用 $|x| = 0, x = 0$。
4. 運用當 $a \le x \le b$ 時，$|x-a| + |x-b|$ 的最小值為 $b-a$。
5. 利用總和式和總積式解循環方程組。

拾例

1. 設 a,b,c,d 為非零實數，且滿足 $|a|+a=0$，$|ab|=ab$， $|c|-c=0$，$\left|\frac{c}{d}\right|=\frac{c}{d}$。化簡 $|abcd|$。

答： 由 $|a|=-a,|c|=c$，得知 $a<0.c>0$。

$|ab|=ab$，得知 $ab>0$，即 $b<0$。

$\left|\frac{c}{d}\right|=\frac{c}{d}$，得知 $\frac{c}{d}>0$，即 $d>0$。

所以 $abcd>0$，$|abcd| = abcd$。

2. 若 $|a|=3,|b|=5$ 及 $|a-b|=b-a$，求 $a+b$ 的最大值。

答： $a=\pm 3,b=\pm 5$，由 $|a-b|=b-a$，得知 $b-a\geq 0$，即 $b\geq a$。

故得 $\begin{cases} b=5 \\ a=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=5 \\ a=-3 \end{cases}$。

$$\begin{aligned} a+b &= 5+3 \quad \text{或} \quad 5-3 \\ &= 8 \quad \text{或} \quad 2 \end{aligned}$$

故最大值為 8。

3. 若函數 $y=\frac{1}{2}(x^2-7x+10+|x^2-7x+10|)$，則當自變量 x 取 1, 2, 3, ..., 10 這 10 個自然數時，函數值的和是多少？

答： 因為 $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$，

所以當 $2\leq x\leq 5$ 時， $|x^2-7x+10|=-(x^2-7x+10)$。

故所求的和為 0。

而當 $x=1,6,7,8,9,10$ 時， $|x^2-7x+10|=x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$。

故所求的和為

$$\begin{aligned} &= (1-2)(1-5)+(6-2)(6-5)+(7-2)(7-5) \\ &\quad +(8-2)(8-5)+(9-2)(9-5)+(10-2)(10-5) \\ &= 4+4+10+18+28+40 \\ &= 104 \end{aligned}$$

。

4. 解方程 $|4x+23| = 4x-23$ 。

答： 方法一：

設 $x < -\frac{23}{4}$ ，

$4x+23$	=	$-4x+23$
$8x$	=	0
x	=	0

無解。

設 $x \geq -\frac{23}{4}$ ，

$4x+23$	=	$4x-23$

無解。

所以全題無解。

方法二：

$(4x+23)^2$	=	$(4x-23)^2$
$16x^2+184x+529$	=	$16x^2-184x+529$
$368x$	=	0
x	=	0

但代入原式，左方為 23，右方為 -23，左右不相等。故無解。

5. 解方程 $|x-2|+|x-3|=1$ 。

答： 設 $x<2$ ，

$-(x-2)-(x-3)$	=	1
$-2x+5$	=	1
x	=	2（捨去）

設 $2 \leq x < 3$ ，

$(x-2)-(x-3)$	=	1
1	=	1

故此區全解。

設 $x \geq 3$ ，

$(x-2)+(x-3)$	=	1
$2x-5$	=	1
x	=	3

所以解為 $2 \leq x \leq 3$ 。

6, 解方程 $x^2-|x|-6=0$。

答： 原方程可改寫成

$$|x|^2-|x|-6 = 0$$
$$(|x|-3)(|x|+2) = 0$$
$$|x| = 3 \quad 或 \quad |x| = -2\text{（捨去）}$$
$$x = \pm 3。$$

7. 若 $y=|x-2|+|x-8|+|x-10|$，且 $2\le x\le 10$，求 y 的最小值和最大值。

答： 方法一：

$$y=|x-2|+|x-8|+|x-10|$$

若 $2\le x<8$， $y=(x-2)-(x-8)-(x-10)=-x+16$

當中最大值為 14，最小值為 8。

若 $8\le x\le 10$， $y=(x-2)+(x-8)-(x-10)=x$

當中最小值為 8，最大值為 10。

故上式的最小值為 8，最大值為 14。

方法二：

留意極值在節點上：

當 $x=2$， y = 0+6+8 = 14，

當 $x=8$， y = 6+0+2 = 8，

當 $x=10$， y = 8+2+0 = 10

故上式的最小值為 8，最大值為 14。

8. 若 $b+c=2, c+a=3, a+b=4$，且 $P=abc$，求 P。

答： 三式相加得，$a+b+c=\frac{9}{2}$，故解得 $a=\frac{5}{2}, b=\frac{3}{2}, c=\frac{1}{2}$。

$P=\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{15}{8}$。

9. 設 x, y, z 為實數且滿足方程組 $\begin{cases} x(y+z)=14 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=20 \end{cases}$，求 $x^2+y^2+z^2$ 的值。

答： $\begin{cases} xy+zx=14 \\ yz+xy=18 \\ zx+yz=20 \end{cases}$，三式相加，$xy+yz+zx=26$，即 $\begin{cases} xy=6 \\ yz=12 \\ zx=8 \end{cases}$。

三式相乘，$x^2y^2z^2=576$，$xyz=\pm 24$。

但若取負值，得 $x=-2, y=-3, z=-4$。若取正值，得 $x=2, y=3, z=4$。

$x^2+y^2+z^2 = (\pm 2)^2+(\pm 3)^2+(\pm 4)^2 = 29$。

10.　已知 x,y,z 是正數且滿足 $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ y+z+yz=14 \\ z+x+zx=19 \end{cases}$，求 $x+y+z$ 的值。

答：$\begin{cases} 1+x+y+xy=12 \\ 1+y+z+yz=15 \\ 1+z+x+zx=20 \end{cases}$，$\begin{cases} (1+x)(1+y)=12 \\ (1+y)(1+z)=15 \\ (1+z)(1+x)=20 \end{cases}$。

所以 $(1+x)^2(1+y)^2(1+z)^2 = 3600$

$(1+x)(1+y)(1+z) = 60$

解得 $(1+x)=4,(1+y)=3,(1+z)=5$，

所以 $x+y+z = (4-1)+(3-1)+(5-1) = 9$。

對數學問題無法抵擋的誘惑與追求，
能讓人全神貫注，
在無止盡的挑戰中得到心靈寧靜，
這是沒有衝突的戰鬥，
是擺脫纏身雜務的避難所，
在今日令人應接不暇的花花世界，
這就像不變的高山美景可供靜賞。

美國數學家、數學史家
莫里斯•克萊因
(Morris Kline 1908-1992)

淺問

1. 解下列方程：

(a) $|x-2|=|x+6|$　　(b) $2(x-2)^2+9|x-2|-5=0$

(c) $\left|\dfrac{1-3x}{4x-5}\right|=2$　　(d) $|2x-7|=4x+1$

(e) $|x+2|+|x+8|=10$　　(f) $(x-2)|x-3|=2$

2. 解 $|3x-|1-2x||=2$。

3. 設 $f(x)=22-7x+|7x-22|$，求 $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(10)$ 的值。

4. 設 x 為有理數及 $w=\left|x+\dfrac{2007}{2008}\right|+\left|x-\dfrac{2007}{2008}\right|$，求 w 的最小可能值。（HKMO 2007/08 初賽個人）

5. 若 $a+b=3$、$b+c=4$、$c+d=5$、$d+e=6$、$e+a=7$，求 a 的值。

6. 若 x,y,z 為正整數且使 $xy=24, zx=48, yz=72$，求 $x+y+z$ 的值。（AMC 10 2001）

7. 若 $x(y+z)=5$， $y(z+x)=10$， $z(x+y)=13$，求正實數 z 的值。

8. $\begin{cases}(x+y)(x+y+z)=165\\(y+z)(x+y+z)=150\\(z+x)(x+y+z)=135\end{cases}$，其中 $x,y,z\geq 0$，求 $2x+3y+5z$ 的值。

9. 若 $\begin{cases}ab+a+b=5\\bc+b+c=9\\ca+c+a=14\end{cases}$，求 abc 的值。

10. A 與 B 合做一事 2 天可完成，B 與 C 合做 4 天可完成， C 與 A 合做 $2\frac{2}{5}$ 天可完成。問 A 一人做此事，可完成需時多少天？（AHSME 1954）

詳答

1. (a) $|x-2|=|x+6|$

$x-2=x+6$ 或 $x-2=-x-6$

$-2=6$ $\quad$ $2x=-4$

無解 $\quad$ $x=-2$

所以 $x=-2$。

(b) $2(x-2)^2+9|x-2|-5=0$

$2|x-2|^2+9|x-2|-5=0$

$(2|x-2|-1)(|x-2|+5)=0$

$|x-2|=\dfrac{1}{2}$ 或 $|x-2|=-5$（捨去）

$x=\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}$

(c) $\left|\dfrac{1-3x}{4x-5}\right|=2$

$\dfrac{1-3x}{4x-5}=2$ 或 $\dfrac{1-3x}{4x-5}=-2$

$1-3x=8x-10$ $\quad$ $1-3x=-8x+10$

$x=1$ $\quad$ $x=\dfrac{9}{5}$

所以 $x=1,\dfrac{9}{5}$。

1.　(d)　$|2x-7| = 4x+1$

$(2x-7)^2 = (4x+1)^2$

$4x^2 - 28x + 49 = 16x^2 + 8x + 1$

$12x^2 + 36x - 48 = 0$

$x^2 + 3x - 4 = 0$

$x = -4, 1$

若 $x = 1$，左方 = $|2(1)-7| = 5$，右方 = $4(1)+1 = 5$，兩方相等。

若 $x = -4$，左方 = $|2(-4)-7| = 15$，右方 = $4(-4)+1 = -15$，兩方不相等。故 $x = 1$。

(e)　$|x+2| + |x+8| = 10$

當 $x < -8$，　$-(x+2)-(x+8) = 10$

$-2x - 10 = 10$

$x = -10$

當 $-8 \le x < -2$　$-(x+2)+(x+8) = 10$

$6 = 10$

無解

當 $x \ge -2$　$(x+2)+(x+8) = 10$

$2x + 10 = 10$

$x = 0$

故得 $x = -10, 0$。

(f)　$(x-2)|x-3| = 2$

當 $x < 3$　$-(x-2)(x-3) = 2$

$-x^2 + 5x - 6 = 2$

$x^2 - 5x + 8 = 0$

無實解。

當 $x \ge 3$　$(x-2)(x-3) = 2$

$x^2 - 5x + 6 = 2$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = 1$（捨去）或 4

故解為 $x = 4$。

2. $\left|3x-|1-2x|\right|=2$

$3x-|1-2x|=2$ 或 $3x-|1-2x|=-2$

$|1-2x|=3x-2$ 或 $|1-2x|=3x+2$

當 $3x-2\geq 0$，即 $x\geq\frac{2}{3}$，

$1-2x=3x-2$ 或 $1-2x=-3x+2$

$x=\frac{3}{5}$（捨去） 或 $x=1$

當 $3x+2\geq 0$，即 $x\geq -\frac{2}{3}$，

$1-2x=3x+2$ 或 $1-2x=-3x-2$

$x=-\frac{1}{5}$ 或 $x=-3$（捨去）

所以得解 $x=-\frac{1}{5},1$

3. $f(x)=\begin{cases}44-14x, x<\frac{22}{7}\\ 0 \quad, x\geq\frac{22}{7}\end{cases}$，即 $f(x)=44-14x$，當 $x=1,2,3$。

所以總和 = $44-14(1)+44-14(2)+44-14(3)=132-14\times 6$ = 48。

4. 由於取 W 的最小值，所以 $-\frac{2007}{2008}\leq x\leq\frac{2007}{2008}$。

所以 W = $\left|x+\frac{2007}{2008}\right|+\left|x-\frac{2007}{2008}\right|$ = $x+\frac{2007}{2008}+\frac{2007}{2008}-x$

= $\frac{2007}{1004}$

5. 把五式相加，得

$2a+2b+2c+2d+2e$ = $3+4+5+6+7$

$2(a+b+c+d+e)$ = 25

$a+b+c+d+e$ = 12.5

$a+b+c+d+e-(b+c)-(d+e)$ = $12.5-4-6$

a = 2.5

6. $\begin{cases} xy = 24\times 1 \\ zx = 24\times 2 \\ yz = 24\times 3 \end{cases}$，三式相乘，

得 $x^2y^2z^2 = 24^3\times 6 = 24^2\times 144$

$= (24\times 12)^2$

即 $xyz = 24\times 12 = 288$

解得 $x=4, y=6, z=12$，所以 $x+y+z = 4+6+12$

$= 22$

7. 把三式相加，得 $2(xy+yz+zx) = 28$

$xy+yz+zx = 14\cdots\cdots(*)$

把（*）分別減去原來的三式，便得 $yz=9$，$xz=4$，$xy=1$

把上三式相乘，得 $x^2y^2z^2 = 36$

$xyz = 6$

所以 $z = \dfrac{6}{xy} = \dfrac{6}{1} = 6$

8. 把三式相加，得 $2(x+y+z)(x+y+z) = 450$

$(x+y+z)^2 = 225$

$x+y+z = 15$

所以， $x+y=11$，$y+z=10$，$z+x=9$。

從而得 $x=5, y=6, z=4$，

即 $2x+3y+5z = 2(5)+3(6)+5(4) = 48$。

9. 由 $ab+a+b=5$，得 $ab+a+b+1=6$ $(a+1)(b+1)=6$。

同理，得 $(b+1)(c+1)=10$、$(c+1)(a+1)=15$。

把三式乘在一起，得 $(a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2 = 900$

$(a+1)(b+1)(c+1) = 30$

把上式除以前三式，得 $a+1=3$、$b+1=2$ 及 $c+1=5$。

即 $abc = 2\times 1\times 4 = 8$。

10. 設 A, B, C 三人各自獨自完成一事需時分別為 x, y, z 天。

則 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{5}{12} \end{cases}$，三式相加，得 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12})$

即 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{12}$。

於是 $\begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{6} \\ \frac{1}{z}=\frac{1}{12} \end{cases}$，所以 A 一人做此事，需時 3 天。

上帝存在，因爲數學前後一貫；
魔鬼也存在，
因爲我們不能證明數學前後一貫。

美國數學家、數學史家
莫里斯‧克萊因
(Morris Kline 1908-1992)