「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

代數 － 複數

摘要

1. 複數的定義和表達形式：

(a) 代數式 $z = x + yi$，其中 x, y 為實數且 $i = \sqrt{-1}$

(b) 三角式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = rcis\theta$

(c) 兩式關係 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 及 $\begin{cases} \theta = \arctan\dfrac{y}{x} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$

2. 複數的基本運算：

(a) $z_1 \pm z_2 = (a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$

(b) $z_1 z_2 = (a+bi) \times (c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

(c) $z_1 z_2 = r_1 cis\theta_1 \times r_2 cis\theta_2 = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$

(d) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{a+bi}{c+di} \times \dfrac{c-di}{c-di} = \dfrac{ac+bd}{c^2+d^2} + \dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

(e) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 cis\theta_1}{r_2 cis\theta_2} = \dfrac{r_1}{r_2} cis(\theta_1 - \theta_2)$

3. 認識單位根 ω 的性質及相關運算：

(a) $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，　$\omega^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，　$\omega^3 = 1$

(b) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

4. 棣莫弗 (de Moivre) 定理的應用：

(a) $z^n = (rcis\theta)^n = r^n cis(n\theta)$

(b) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{rcis\theta} = \sqrt[n]{r}cis(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n})$，其中 $k = 0,1,2,\ldots,n-1$

5.　複數的共軛值的性質：

若 $z = a + bi$ 則 $\bar{z} = a - bi$

(a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

(b) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ ，$z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

(c) $\bar{\bar{z}} = z$

(d) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

(e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(f) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

6.　複數的模的性質：

若 $z = a + bi$ 則 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

(a) $|z| \geq |\mathrm{Re}(z)|$ ，$|z| \geq |\mathrm{Im}(z)|$

(b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(d) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

拾例

1. 實數 m 為何值時，複數 $z=(m^2-1)+(m^2-4m+3)i$ 為純虛數。

答： 令 $\begin{cases} m^2-1=0 \\ m^2-4m+3\neq 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} m=-1,1 \\ m\neq 1,3 \end{cases}$，故取 $m=-1$。

2. 求 $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i}$ 的值。

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+i)}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-3i+i+\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}-2i}{16} = \frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i$$ 。

3. 求 $\sqrt{8+6i}$ 的值。

答： 令 $(8+6i)=(a+bi)^2$，其中 a,b 均為實數。

展開後得 $a^2-b^2=8$、 $2ab=6$。

即 代 $b=\dfrac{3}{a}$ 入上式，

$$a^2-\frac{9}{a^2} = 8$$
$$a^4-8a^2-9 = 0$$
$$a^2=9 \text{ 或 } a^2=-1 \text{（捨去）}$$

即 $a=\pm 3$，對應 $b=\pm 1$。從上 $ab=2$ 可知原式 a,b 符號相同。

即 $\sqrt{8+6i} = 3+i,-3-i$ 。

（註： 提示複數無大小、正負之分，故平方根亦有兩值。）

4. 設 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，求 $\dfrac{1}{3\omega^3+2\omega^2+\omega}$ 的值。

答： ω 為 $1+x+x^2=0$ 的根，即 $\omega^3=1$ 及 $1+\omega+\omega^2=0$。

原式 $=\dfrac{1}{3+2(-1-\omega)+\omega}=\dfrac{1}{3-2-2\omega+\omega}$

$=\dfrac{1}{1-\omega}=\dfrac{1}{1-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}}$

$=\dfrac{2}{3-\sqrt{3}i}=\dfrac{2(3+\sqrt{3}i)}{(3-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i)}$

$=\dfrac{6+2\sqrt{3}i}{9+3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$。

5. 設 $x=\dfrac{i-2}{3}$，求 $x^2+4x+23$ 的值。

答： $3x+2 = i$

$9x^2+12x+4 = -1$

$9x^2+12x+5 = 0$

$9x^2+12x = -5$

所以 $x^2+4x+23 = \dfrac{1}{3}(9x^2+12x)+23 = -\dfrac{5}{3}+23$

$=\dfrac{64}{3}$。

6. 設 $z=-1+\sqrt{3}i$，求 iz 的輻角和模。

答： $z = 2(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})$

$i = \cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$。

iz 的輻角 $=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{7\pi}{6}$。

iz 的模 $= 2$。

7. 計算 $\overline{(1+2i)(3-4i)}$。

答： 原式 $=(1-2i)(3+4i) = 3-6i+4i+8 = 11-2i$。

8. 若實數 a,b 使方程 $x^3+ax^2+bx+8=0$ 的其中一個根為 $1-i$，求 $a+b$ 的值。

答： 因為$1-i$ 為方程的根，故 $1+i$ 同為方程的根。

即方程含因式 $[x-(1+i)][x-(1+i)] = x^2-2x+2$。

從 x^3 的系數和常數項可知

$$x^3+ax^2+bx+8 = (x^2-2x+2)(x+4) = x^3+2x^2-6x+8$$

所以得 $a=2, b=-6$，即 $a+b=2-6=-4$。

9. 求 $(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{10}$。

答： 原式 $= (\cos 120° + \sin 120°)^{10} = \cos 1200° + \sin 1200°$

$= \cos 120° + \sin 120° = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

10. 解複方程 $|z|+z=3-i$。

答： 由 $|z|$ 為實數，所以令 $z=a-i$。

由原式得：

$$\sqrt{a^2+1}+a = 3$$
$$a^2+1 = (3-a)^2$$
$$a^2+1 = 9-6a+a^2$$
$$6a = 8$$
$$a = \frac{4}{3}$$

所以 $z=\frac{4}{3}-i$。

淺問

1. 已知複數 $z=(2+i)m^2-3(1+i)m-2(1-i)$，其中 m 為實數，求下列情況下，m 的值：
   (a) z 為實數　(b) z 為純虛數　(c) $z=33+12i$

2. 若 $z_1=1+2i$, $z_2=3-4i$, $z_3=-5+6i$，求下列各式的值：
   (a) $z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}$　(b) $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$　(c) $z_3^{\,2}+(\overline{z_2})^2$

3. 求 $\sqrt{z}$，其中 z 為
   (a) $8+6i$　(b) $-15-8i$　(c) $5-12i$

4. 試把下列複數轉成三角式：
   (a) $1+\sqrt{3}i$　(b) $2-2i$　(c) $-4i$

5. 試把下列複數轉成標準式：
   (a) $2cis(45°)$　(b) $4cis(150°)$　(c) $\sqrt{3}cis(300°)$

6. 求 $(1-i)^{10}$ 的值。

7. 若 $(1+i)^n$ 為一正實數，試求正整數 n 的最小值。

8. 設 $Z=(1+2i)^4(-3-4i)^5$，求 $|Z|$ 的值。

9. 已知複數 $z=(a+3)+(2a+1)i$，其中 a 為正實數，求 $|z|$ 的最小值。

10. 設非零複數 x, y 滿足 $x^2+xy+y^2=0$，求 $(\frac{x}{x+y})^{1990}+(\frac{y}{x+y})^{1990}$ 的值。
    (高數聯 1990)

11. 求下列方程的所有複數根：
    (a) $x^2-2x+4=0$　(b) $(x+1)(x+3)(x+5)=2\times4\times6$

12. 已知方程 $x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$ 的一根為 $a+bi$，而另一根為 $a+2bi$，其中 a,b 為實數。解此方程。

詳答

1. $z=(2+i)m^2-3(1+i)m-2(1-i)$，

即 $z=(2m^2-3m-2)+(m^2-3m+2)i$

(a) z 為實數，即 $m^2-3m+2=(m-1)(m-2)=0$

所以得解 $m=1$ 或 2。

(b) z 為純虛數，即

$$\begin{cases}2m^2-3m-2=0\\ m^2-3m+2\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(2m+1)(m-2)=0\\ (m-1)(m-2)\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m=2, m=-\dfrac{1}{2}\\ m\neq 1, m\neq 2\end{cases}$$

所以得解 $m=-\dfrac{1}{2}$。

(c) $z=33+12i$，即

$$\begin{cases}2m^2-3m-2=33\\ m^2-3m+2=12\end{cases}$$

$$\begin{cases}2m^2-3m-35=0\\ m^2-3m-10=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(m-5)(2m+7)=0\\ (m-5)(m+2)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m=-\dfrac{7}{2}, m=5\\ m=-2, m=5\end{cases}$$

所以得解 $m=5$。

2. (a) $z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3} = (1+2i)(3+4i)+(3-4i)(-5-6i)$

$= 3+4i+6i-8-15-18i+20i-24$

$= -44+12i$

(b) $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{1+2i}+\dfrac{1}{3-4i}$

$= \dfrac{1}{1+2i}\times\dfrac{1-2i}{1-2i}+\dfrac{1}{3-4i}\times\dfrac{3+4i}{3+4i}$

$= \dfrac{1-2i}{5}+\dfrac{3+4i}{25} = \dfrac{5-10i}{25}+\dfrac{3+4i}{25}$

$= \dfrac{8}{25}-\dfrac{6}{25}i$

(c) $z_3{}^2+(\overline{z_2})^2 = (-5+6i)^2+(3+4i)^2$

$= 25-60i-36+9+24i-16$

$= -18-36i$

3. (a) 令 $(a+bi)^2=8+6i$，即 $a^2-b^2+2abi=8+6i$，其中 $a,b\in R$。

解 $\begin{cases}a^2-b^2=8\\ ab=3\end{cases}$，即 $a^2-\dfrac{9}{a^2}=8$，$a^4-8a^2-9=0$。

解得 $a^2=9$ 或 $a^2=-1$（捨去）

故得 $a=\pm3$，對應 $b=\pm1$，故根值為 $3+i$ 或 $-3-i$。

(b) 令 $(a+bi)^2=-15-8i$，即 $a^2-b^2+2abi=-15-8i$，其中 $a,b\in R$。

解 $\begin{cases}a^2-b^2=-15\\ ab=-4\end{cases}$，即 $a^2-\dfrac{16}{a^2}=-15$，$a^4+15a^2-16=0$。

解得 $a^2=1$ 或 $a^2=-16$（捨去）

故得 $a=\pm1$，對應 $b=\mp4$，故根值為 $1-4i$ 或 $-1+4i$。

(c) 令 $(a+bi)^2=5-12i$，即 $a^2-b^2+2abi=5-12i$，其中 $a,b\in R$。

解 $\begin{cases}a^2-b^2=5\\ ab=-6\end{cases}$，即 $a^2-\dfrac{36}{a^2}=5$，$a^4-5a^2-36=0$。

解得 $a^2=9$ 或 $a^2=-4$（捨去）

故得 $a=\pm3$，對應 $b=\mp2$，故根值為 $3-2i$ 或 $-3+2i$。

4. (a) $1+\sqrt{3}i = \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{1^2+3}}\right)\times\sqrt{1^2+3} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \sqrt{2}(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

(b) $2-2i = \left(\frac{2-2i}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}\right)\times\sqrt{2^2+(-2)^2}$

$= \sqrt{8}\left(\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{2i}{\sqrt{8}}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= 2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\sin 315^\circ)$

(c) $-4i = 4(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ)$

5. (a) $2cis(45^\circ) = 2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= \sqrt{2}+\sqrt{2}i$

(b) $4cis(150^\circ) = 4(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$= -2\sqrt{3}+2i$

(c) $\sqrt{3}cis(300^\circ) = \sqrt{3}(\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$

6. $(1-i)^{10} = (\sqrt{2})^{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{10}$

$= 32\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^{10}$

$= 32\left(\cos\frac{35\pi}{2}+i\sin\frac{35\pi}{2}\right)$

$= -32i$

7. $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^n = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})$

若要結果為實數，即 $\sin\frac{n\pi}{4} = 0$，得 $n=4k$，其中 k 為整數。

若取 $n=4$，即 $(1+i)^4 = 2^{\frac{4}{2}}(\cos\pi+i\sin\pi) = -4$

故取 $n=8$，即 $(1+i)^8 = (-4)^2 = 16$

答案為 $n=8$。

8. $|Z| = |(1+2i)^4(-3-4i)^5| = |(1+2i)|^4\times|(-3-4i)|^5$

$= (\sqrt{1^2+2^2})^4\times[\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}]^5$

$= 5^2\times 5^5 = 5^7 = 78125$

9. $z=(a+3)+(2a+1)i$

$|z| = \sqrt{(a+3)^2+(2a+1)^2} = \sqrt{a^2+6a+9+4a^2+4a+1}$

$= \sqrt{5a^2+10a+10} = \sqrt{5(a+1)^2+5}$

故最小值為 $\sqrt{5}$。

10. 令 $y=\omega x$，則 $x^2(1+\omega+\omega^2)=0$，

由於 $x\neq 0$，所以 $1+\omega+\omega^2=0$，即 $\omega^3=1$。

$(\frac{x}{x+y})^{1990}+(\frac{y}{x+y})^{1990} = (\frac{x}{x+\omega x})^{1990}+(\frac{\omega x}{x+\omega x})^{1990}$

$= \frac{1}{(1+\omega)^{1990}}+\frac{\omega^{1990}}{(1+\omega)^{1990}} = \frac{1+\omega^{1990}}{(1+\omega)^{1990}}$

$= \frac{1+\omega^{1990}}{(-\omega^2)^{1990}} = \omega^{-3980}+\omega^{-1990}$

$= \omega+\omega^2 = -1$

11. (a) $x = \dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(4)}}{2(1)} = \dfrac{2\pm\sqrt{-12}}{2}$

$= 1\pm\sqrt{3}i$ 。

(b) 顯然 $x=1$ 為其中一根。

$$\begin{aligned}
(x+1)(x+3)(x+5) &= 48 \\
x^3+9x^2+23x+15-48 &= 0 \\
x^3+9x^2+23x-33 &= 0 \\
(x-1)(x^2+10x+33) &= 0
\end{aligned}$$

解得 $x=1,-5\pm 2\sqrt{2}i$ 。

12.
$$\begin{aligned}
x^4-4x^3+11x^2-14x+10 &= 0 \\
[x-(a+bi)][x-(a-bi)][x-(a+2bi)][x-(a-2bi)] &= 0 \\
[x^2-(a-bi)x-(a+bi)x+(a-bi)(a+bi)] \\
\times[x^2-(a-2bi)x-(a+2bi)x+(a-2bi)(a+2bi)] &= 0 \\
[x^2-2ax+(a^2+b^2)]\times[x^2-2ax+(a^2+4b^2)] &= 0 \\
x^4-2ax^3+(a^2+4b^2)x^2-2ax^3+4a^2x^2-2ax(a^2+4b^2) \\
+(a^2+b^2)x^2-2ax(a^2+b^2)+(a^2+b^2)(a^2+4b^2) &= 0 \\
x^4-4ax^3+(6a^2+5b^2)x^2-2a(2a^2+5b^2)x+(a^2+b^2)(a^2+4b^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

比較系數，得知

$-4a=-4$ ，即 $a=1$ 。

$6a^2+5b^2=11$ ，即 $b^2=1$ ， $b=\pm 1$ 。

所以該方程的根為 $x=1\pm i, 1\pm 2i$ 。

我們欣賞數學，我們需要數學。

美籍華裔數學家

陳省身 (1911-2004)