

## 代數 - 有理不等式

### 摘要

1. 解線性不等式或聯立線性不等式。
2. 解二次不等式：  
即若  $\alpha, \beta$  為二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的實根且  $\alpha > \beta$ ，則
  - (a) 若  $ax^2 + bx + c \geq 0$  得  $x \geq \alpha$  或  $x \leq \beta$ ，
  - (b) 若  $ax^2 + bx + c \leq 0$  得  $\beta \leq x \leq \alpha$ ，
  - (c) 若  $ax^2 + bx + c > 0$  得  $x > \alpha$  或  $x < \beta$ ，
  - (d) 若  $ax^2 + bx + c < 0$  得  $\beta < x < \alpha$ 。
3. 解分式不等式：
  - (a) 若  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 (\leq 0)$  等價於  $\begin{cases} f(x) \times g(x) \geq 0 (\leq 0) \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ ，
  - (b) 若  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 (< 0)$  等價於  $f(x) \times g(x) > 0 (< 0)$ 。
4. 解含有絕對值的不等式：
  - (a) 若  $|x| \geq a \geq 0$  得  $x \geq a$  或  $x \leq -a$ ，
  - (b) 若  $|x| \leq a$  得  $-a \leq x \leq a$ ，
  - (c) 若  $|x| > a \geq 0$  得  $x > a$  或  $x < -a$ ，
  - (d) 若  $|x| < a$  得  $-a < x < a$ ，
  - (e) 使用區間法。

5. 解含有絕對函數的不等式：

(a) 若  $|f(x)| \geq g(x)$  得  $f(x) \geq g(x)$  或  $f(x) \leq -g(x)$ ，

(b) 若  $|f(x)| \leq g(x)$  得  $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ ，

(c) 若  $|f(x)| > g(x)$  得  $f(x) > g(x)$  或  $f(x) < -g(x)$ ，

(d) 若  $|f(x)| < g(x)$  得  $-g(x) < f(x) < g(x)$ 。

(e) 若  $|f(x)| \geq |g(x)|$  得  $[f(x)]^2 \geq [g(x)]^2$ ，

即  $[f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] \geq 0$ ，

(f) 若  $|f(x)| > |g(x)|$  得  $[f(x)]^2 > [g(x)]^2$ ，

即  $[f(x) - g(x)][f(x) + g(x)] > 0$ 。

## 拾例

1. 若  $1 < a < 9, 2 < b < 8$ ，求下列各式的取值範圍。

(a)  $ab$

(b)  $a^2 - b^2$

(c)  $|a - b|$

答：(a)  $1 \times 2 < ab < 9 \times 8$

$$2 < ab < 72$$

(b)  $1^2 - 8^2 < a^2 - b^2 < 9^2 - 2^2$

$$-63 < a^2 - b^2 < 77$$

(c)  $1 - 8 < a - b < 9 - 2$

$$-7 < a - b < 7$$

所以  $0 \leq |a - b| < 7$ 。

2.  $a, b, c$  是三個非負實數，並且滿足  $3a + 2b + c = 5$  及  $2a + b - 3c = 1$ 。設  $m = 3a + b - 7c$ ，記  $x$  為  $m$  的最小值， $y$  為  $m$  的最大值，求  $xy$  的值。  
(中國北京市中學生數學競賽 2003 初二複賽)

答：消去  $b$ ，得  $a = 7c - 3$ ，

消去  $a$ ，得  $b = 7 - 11c$ 。

由此得 
$$\begin{cases} c \geq 0 \\ 7c - 3 \geq 0 \\ 7 - 11c \geq 0 \end{cases} \text{，故得 } \frac{7}{11} \leq c \leq \frac{3}{7}。$$

$$\begin{aligned} \text{由於 } m &= 3a + b - 7c = 3(7c - 3) + (7 - 11c) - 7c \\ &= 21c - 9 + 7 - 11c - 7c \\ &= 3c - 2 \end{aligned}$$

$$\text{故最小值 } x \text{ 為 } 3\left(\frac{7}{11}\right) - 2 = -\frac{1}{11}。$$

$$\text{而最大值 } y \text{ 為 } 3\left(\frac{3}{7}\right) - 2 = -\frac{5}{7}。$$

$$\text{所以 } xy = \left(-\frac{1}{11}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{5}{77}。$$

3. 若  $M, N$  為取自 1 至 50 之間的兩個不同的整數，求  $\frac{M+N}{M-N}$  的最大值。

(SAMO-S 2011)

答： 要使分數最大，即分母最小且為正數，

取  $M-N=1$ ，即  $(M, N) = (50, 49)$ ，

此時分子最大值  $M+N=50+49=99$ ，

故該分數的最大值當  $(M, N) = (50, 49)$ ，即  $\frac{M+N}{M-N} = \frac{50+49}{50-49} = 99$ 。

4. 如果不等式組  $\begin{cases} 6x-a \geq 0 \\ 4x-b < 0 \end{cases}$  的整數解僅為 1, 2, 3，問有多少對適合這個不等式的有序整數對  $(a, b)$ ？

答： 不等式組得解  $\frac{a}{6} \leq x < \frac{b}{4}$ 。

即  $0 < \frac{a}{6} \leq 1$  及  $3 < \frac{b}{4} \leq 4$ 。

故得  $0 < a \leq 6$  及  $12 < b \leq 16$ ，即  $1 \leq a \leq 6$ ， $13 \leq b \leq 16$ 。

故有序整數對  $(a, b)$ ， $6 \times 4 = 24$ 。

5. 問不等式  $4 < (x-3)^2 < 81$  有多少個整數解？

答：  $(x-3)^2 > 4$  及  $(x-3)^2 < 81$

$-2 < x-3 < 2$  及  $-9 < x-3 < 9$

$1 < x < 5$  及  $-6 < x < 12$

總結得， $-6 < x < 1$  或  $5 < x < 12$ 。

符合整數共有  $(8-2) + (8-2) = 12$  個。

6. 解不等式  $(x^2+x-2)(x^2-x-6) < 0$

答：  $(x-1)(x+2)(x+2)(x-3) < 0$

$(x-1)(x+2)^2(x-3) < 0$

$(x-1)(x-3) < 0$  及  $x \neq -2$

得解  $1 < x < 3$ 。

7. 解不等式  $\frac{x+1}{2x-1} \geq \frac{1}{3}$ 。

答：  $\frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{3} \geq 0$

$$\frac{3(x+1)-(2x-1)}{3(2x-1)} \geq 0$$

$$\frac{x+4}{6x-3} \geq 0$$

上式等價於  $\begin{cases} (x+4)(6x-3) \geq 0 \\ 6x-3 \neq 0 \end{cases}$ ，即  $\begin{cases} (x+4)(x-\frac{1}{2}) \geq 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

所以解為  $x \leq -4$  或  $x > \frac{1}{2}$ 。

8. 解不等式  $|x-5| - |2x-3| < 1$ 。

答： 當  $x < \frac{3}{2}$ ，原式可化成

$$-(x-5) + (2x-3) < 1$$

$$x+2 < 1$$

$$x < -1$$

故得解  $x < -1$ 。

當  $\frac{3}{2} \leq x < 5$ ，原式可化成

$$-(x-5) - (2x-3) < 1$$

$$-3x+8 < 1$$

$$x > \frac{7}{3}$$

故得解  $\frac{7}{3} < x < 5$ 。

當  $x \geq 5$ ，原式可化成

$$(x-5) - (2x-3) < 1$$

$$-x-2 < 1$$

$$x > -3$$

故得解  $x \geq 5$ 。

綜合得  $x < -1$  或  $x > \frac{7}{3}$ 。

9. 有多少個整數  $x$  滿足於  $19 \leq |7x+1| \leq 97$ 。

答：由  $|7x+1| \leq 97$

$$\text{得 } -97 \leq 7x+1 \leq 97$$

$$-14 \leq x \leq \frac{96}{7} = 13\frac{5}{7}$$

由  $|7x+1| \geq 19$

$$\text{得 } 7x+1 \geq 19 \quad \text{或} \quad 7x+1 \leq -19$$

$$x \geq \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7} \quad \text{或} \quad x \leq -\frac{20}{7} = -2\frac{6}{7}$$

$$\text{所以有解 } -14 \leq x \leq -2\frac{6}{7} \quad \text{或} \quad 2\frac{4}{7} \leq x \leq 13\frac{5}{7}$$

故滿足條件的整數有：  $-14, -13, -12, \dots, -3, 3, 4, 5, \dots, 13$ ，共 23 個。

10. 某人將一本書的頁碼按  $1, 2, 3, \dots$  順序相加，其中一個頁碼被加漏了，結果得到一個錯誤的總和 2012，問被加漏的頁碼是多少？

答：設順序相加的頁碼至  $n$ ，而被加漏的頁碼為  $x$ ，當然有  $1 \leq x \leq n$ 。

錯誤的總和為

$$\frac{n(n+1)}{2} - n \leq \frac{n(n+1)}{2} - x \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - n \leq 2012 \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$n^2 - n \leq 4024 \leq n^2 + n - 2$$

留意  $\sqrt{4024} \approx 63$ ，可以取  $n = 63$ ， $\frac{63 \times (63+1)}{2} = 2016 > 2012$ 。

即被加漏的頁碼為  $2016 - 2012 = 4$ 。

## 淺問

- 若  $2 < a < 8, 3 < b < 9$ ，求下列各式的取值範圍：  
(a)  $a+b$  (b)  $ab$   
(c)  $\frac{a}{b}$  (d)  $(a-b)^2$
- 已知不等式組  $\begin{cases} 2x-3a < 7b+2 \\ 6b-3x-3 < 5a \end{cases}$  的解為  $4 < x < 23$ ，求  $ab+a+b$  的值。
- 如果不等式組  $\begin{cases} 2x-a \geq 0 \\ 3x-b < 0 \end{cases}$  的整數解僅為 4, 5, 6, 7, 8，問有多少對適合這個不等式的有序整數對  $(a, b)$ ？
- 解下列不等式：  
(a)  $x^2+5x < 6$  (b)  $3(x^2+1) \geq 10x$
- 對一切實數  $x$ ，不等式  $ax^2+(2a-1)x-(a-2) < 0$  恆成立，求  $a$  的最大值。
- 解下列不等式：  
(a)  $\frac{x+2}{x-3} \leq 0$  (b)  $\frac{x-4}{x+5} > 2$
- 解不等式  $\frac{x^2+2x-2}{3+2x-x^2} < x$ 。
- 解下列不等式：  
(a)  $|x+4| \geq 7$  (b)  $x^2-2 > |x|$
- 解下列不等式：  
(a)  $|x-1|+|x+2| \leq 5$  (b)  $\left| \frac{1}{1+x} \right| > \frac{1}{1+x}$
- 若滿足不等式  $\left| \frac{x}{2} - \sqrt{2} \right| < \frac{3}{2}$  的整數解有  $d$  個，求  $d$  的值。  
(HKMO 2006/07 決賽個人)

## 詳答

$$\begin{aligned} 1. \quad (a) \quad & 2+3 < a+b < 8+9 \\ & 5 < a+b < 17 \\ (b) \quad & 2 \times 3 < ab < 8 \times 9 \\ & 6 < ab < 72 \\ (c) \quad & \frac{2}{9} < \frac{a}{b} < \frac{8}{3} \\ (d) \quad & 0 < (a-b)^2 < (2-9)^2 \\ & 0 < (a-b)^2 < 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & \text{解得 } \begin{cases} x < \frac{3a+7b+2}{2} \\ x > \frac{-5a+6b-3}{3} \end{cases}, \text{ 由此得 } \begin{cases} \frac{3a+7b+2}{2} = 23 \\ \frac{-5a+6b-3}{3} = 4 \end{cases}, \\ & \text{即得 } \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}, \text{ 所以 } ab+a+b = (a+1)(b+1)-1 \\ & \qquad \qquad \qquad = (3+1)(5+1)-1 = 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \text{不等式組得解 } \frac{a}{2} \leq x < \frac{b}{3}. \\ & \text{即 } 3 < \frac{a}{2} \leq 4 \text{ 及 } 8 < \frac{b}{3} \leq 9. \\ & \text{故得 } 6 < a \leq 8 \text{ 及 } 24 < b \leq 27, \text{ 即 } 7 \leq a \leq 8, 25 \leq b \leq 27. \\ & \text{故有序整數對 } (a, b), 2 \times 3 = 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad (a) \quad & x^2 + 5x < 6 \\ & x^2 + 5x - 6 < 0 \\ & (x-1)(x+6) < 0 \\ & -6 < x < 1 \\ (b) \quad & 3(x^2 + 1) \geq 10x \\ & 3x^2 - 10x + 3 \geq 0 \\ & (3x-1)(x-3) \geq 0 \\ & x \leq \frac{1}{3} \text{ 或 } x \geq 3 \end{aligned}$$



5. a 該滿足  $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = (2a-1)^2 - 4a(a-2) < 0 \end{cases}$  , 即  $\begin{cases} a < 0 \\ 4a+1 < 0 \end{cases}$   
 解得  $a < -\frac{1}{4}$  , 即 a 的最大值為 -1。

6. (a)  $\frac{x+2}{x-3} \leq 0$   
 $(x+2)(x-3) \leq 0$   
 $-2 \leq x \leq 3$  但  $x \neq 3$  , 故解為  $-2 \leq x < 3$ 。

(b)  $\frac{x-4}{x+5} > 2$   
 $\frac{x-4}{x+5} - 2 > 0$   
 $\frac{x-4-2x-10}{x+5} > 0$   
 $\frac{-x-14}{x+5} > 0$   
 $\frac{x+14}{x+5} < 0$   
 $(x+5)(x+14) < 0$   
 $-14 < x < -5$

7.  $\frac{x^2+2x-2}{3+2x-x^2} - x < 0$   
 $\frac{x^2+2x-2-3x-2x^2+x^3}{3+2x-x^2} < 0$   
 $\frac{x^3-x^2-x-2}{x^2-2x+3} > 0$   
 $\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-3)(x+1)} > 0$

由於  $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$

所以原式等價於

$(x+1)(x-2)(x-3) > 0$

即  $-1 < x < 2$  或  $x > 3$

8. (a)  $|x+4| \geq 7$   
 $x+4 \geq 7$  或  $x+4 \leq -7$   
 $x \geq 3$  或  $x \leq -11$   
 所以  $-11 \leq x \leq 3$ 。

(b)  $|x|^2 - |x| - 2 > 0$ ，  
 即  $|x| < -1$  (捨去) 或  $|x| > 2$ 。  
 故解為  $x < -2$  或  $x > 2$ 。

9. (a)  $|x-1| + |x+2| \leq 5$   
 當  $x < -2$  時，  
 $-(x-1) - (x+2) \leq 5$   
 $-x+1-x-2 \leq 5$   
 $-2x \leq 6$   
 $x \geq -3$   
 所以  $-3 \leq x < -2$ 。

當  $-2 \leq x < 1$  時，  
 $-(x-1) + (x+2) \leq 5$   
 $-x+1+x+2 \leq 5$   
 $3 \leq 5$   
 所以  $-2 \leq x < 1$ 。

當  $x \geq 1$  時，  
 $(x-1) + (x+2) \leq 5$   
 $2x+1 \leq 5$   
 $x \leq 2$   
 所以  $1 \leq x \leq 2$ 。

綜合而得  $-3 \leq x \leq 2$ 。

(b) 由  $\left| \frac{1}{1+x} \right| > \frac{1}{1+x}$  可知  $\frac{1}{1+x} < 0$ ，即  $1+x < 0$ ， $x < -1$ 。

10.  $-\frac{3}{2} < \frac{x}{2} - \sqrt{2} < \frac{3}{2}$   
 $-3 + 2\sqrt{2} < x < 3 + 2\sqrt{2}$   
 $\sqrt{2} \approx 1.4$ ，所以  $-3 + 2\sqrt{2} \approx -0.2$ ， $3 + 2\sqrt{2} \approx 5.8$   
 $x$  的整數解包括 0, 1, 2, 3, 4, 5，即  $d=6$ 。