「噢！數？」拾例集　周浩然輯

代數 － 絕對不等式

摘要

1. 認識不等式的證明技巧，如求差法、求商法、縮放法等。
2. 認識均值不等式及其應用：

$$Q.M.=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}} \qquad A.M.=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

$$H.M.=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \qquad G.M.=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$$

則 $Q.M.\ge A.M.\ge G.M.\ge H.M.$，

等號成立當且僅當 $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n$ 。

3. 認識柯西（Cauchy）不等式及其應用：

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}a_i^2\times\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$，

等號成立當且僅當 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ 。

4. 認識排序不等式及其應用：

若 $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots\ge a_n$ 及 $b_1\ge b_2\ge b_3\ge\ldots\ge b_n$

則 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\ldots+a_nb_n$（順序）

$\ge$ $a_1b_x+a_2b_y+a_3b_z+\ldots+a_nb_w$（亂序）

$\ge$ $a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\ldots+a_nb_1$（逆序）

等號成立當且僅當 $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_n$

及 $b_1=b_2=b_3=\ldots=b_n$ 。

5. 認識切比雪夫（Chebyshev）不等式及其應用：

若 $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n$ 及 $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \ldots \ge b_n$

則 $\dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_nb_n}{n}$

$\ge \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} \times \dfrac{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n}{n}$

$\ge \dfrac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + a_3b_{n-2} + \ldots + a_nb_1}{n}$

等號成立當且僅當 $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n$

及 $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n$ 。

6. 認識三角形不等式及其應用，
即三角形任一邊的長度少於其餘兩邊長度的和。

7. 判定銳角（鈍角）三角形的條件，
任兩邊的平方和大於（小於）第三邊的平方，及符合三角不等式。

拾例

1. 設 a,b,c,d 為任意正數，

證 $1<\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<2$ 。

答： 因為 $\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a} < \frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1$

$\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c} < \frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d} = \frac{c+d}{c+d} = 1$

所以 $\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<1+1=2$ 。

再者 $\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}$

$> \frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}$

$= \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} = 1$

綜合而得 $1<\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+d+b}+\frac{d}{d+a+c}<2$ 。

2. 若 $P=\frac{1}{a^2+a+1}$ 及 $Q=a^2-a+1$，證明 $Q\geq P$ 。

答： $\frac{Q}{P} = (a^2-a+1)(a^2+a+1) = (a^2+1)^2-a^2$

$= a^4+2a^2+1-a^2 = a^4+a^2+1 \geq 1$

所以 $Q\geq P$，等號成立當 $a^4+a^2+1=1$，即 $a=0$ 。

3. 設 a,b,c,d 為四個互不相等的正實數，證 $(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})(\frac{b}{a}+\frac{d}{c})>4$。

答： 解法一：

由 AM ≥ GM，得

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} > 2\sqrt{\frac{ac}{bd}}$ ， $\frac{b}{a}+\frac{d}{c} > 2\sqrt{\frac{bd}{ac}}$

故原式 $> 2\sqrt{\frac{ac}{bd}}\times 2\sqrt{\frac{bd}{ac}} = 4\sqrt{\frac{ac}{bd}\times\frac{bd}{ac}} = 4$

解法二：

考慮 $(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})(\frac{b}{a}+\frac{d}{c})-4 = \frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}+2-4 = \frac{ad}{bc}+\frac{bc}{ad}-4$

$= (\sqrt{\frac{ad}{bc}}-\sqrt{\frac{bc}{ad}})^2 > 0$

所以原式得證。

4. 若 $a+b+c=1$ 且 $a,b,c>0$，證明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$

解法一：

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &= \frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\\ &= \frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+3\\ &= (\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+3\\ &\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\times\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\times\frac{c}{a}}+3 \text{（由 AM ≥ GM ）}\\ &= 9\end{aligned}$$

解法二：

由 AM ≥ HM

$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{3}{a+b+c}\times 3=9$。

5. 已知實數 x,y 滿足 $1\le x^2+y^2\le 4$，求 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ 的最值。

答： 由 AM ≥ GM，

$\sqrt{x^2y^2}\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，即 $|xy|\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\le xy\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)$。

所以 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ 的最大值為 $x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)+y^2$

$$= \frac{3}{2}(x^2+y^2)$$

$$= \frac{3}{2}(4) = 6。$$

而 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ 的最小值為 $x^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+y^2$

$$= \frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}。$$

所以當 $x=y=2$，原式得 6； $x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，原式得 $\frac{1}{2}$。

（註：此題亦可以三角法計算。）

我知道的，是很少的；

我不知道的，是無限的。

法國數學家、天文學家

拉普拉斯 (*1749-1827*)

6. 設 a,b,c,d 都是正數，求 $(a+b+c+d)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d})$ 的最小值。

答： 解法一：

由柯西不等式，

$$(a+b+c+d)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d})$$

$$\geq (\sqrt{a}\times\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{b}\times\frac{1}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\times\frac{1}{\sqrt{c}}+\sqrt{d}\times\frac{1}{\sqrt{d}})^2$$

$$(a+b+c+d)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \geq (1+1+1+1)^2$$

$$(a+b+c+d)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \geq 16$$

故上式最小值為 16，當 $a=b=c=d=1$ 時。

解法二：

由 AM ≥ HM，

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$$

$$(a+b+c+d)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}) \geq 16$$

故上式最小值為 16，當 $a=b=c=d=1$ 時。

What we know is not much.

What we do not know is immense.

Pierre Simon Laplace (1749-1827)

7. 設 a,b,c 都是正數，證 $a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge abc(a+b+c)$。

答： 由於對稱性，不妨假設 $a \ge b \ge c$，即 $a^2 \ge b^2 \ge c^2$ 或 $ab \ge ac \ge bc$。

解法一：

根據排序不等式，

$$a^2 \times a^2 + b^2 \times b^2 + c^2 \times c^2 \ge a^2 \times b^2 + b^2 \times c^2 + c^2 \times a^2$$

又 $(ab)(ab)+(bc)(bc)+(ca)(ca) \ge (ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)$

即 $a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge abc(a+b+c)$

解法二：

由 AM ≥ GM，

$\dfrac{a^4+b^4}{2} \ge \sqrt{a^4b^4} = a^2b^2$，同理 $\dfrac{b^4+c^4}{2} \ge b^2c^2$ 及 $\dfrac{c^4+a^4}{2} \ge c^2a^2$，

三式相加，得 $a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

又 $\dfrac{a^2b^2+b^2c^2}{2} \ge \sqrt{a^2b^2 \times b^2c^2} = ab^2c$，

同理 $\dfrac{b^2c^2+c^2a^2}{2} \ge bc^2a$，$\dfrac{c^2a^2+a^2b^2}{2} \ge ca^2b$，

三式相加，得 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge abc(a+b+c)$。

8. 一個三角形的三邊長分別是 7.5cm、11cm 和 x cm。若 x 為整數，求 x 的最小值。（HKMO 2002/03 初賽個人）

答： 根據三角形不等式：

$\begin{cases} x+7.5>11 \\ 7.5+11>x \end{cases}$，所以得 $3.5<x<18.5$，即 x 的最小值為 4。

9. **已知銳角三角形三邊長分別為 2, 3, x，求第三邊 x 的取值範圍。（中國四川省重慶市初中數學競賽 1983）

答： 由銳角三角形得知：$\begin{cases} 2^2+3^2>x^2 \\ 2^2+x^2>3^2 \end{cases}$，得 $5<x^2<13$，即 $\sqrt{5}<x<\sqrt{13}$。

10. 已知鈍角三角形三邊長分別為 5, 7, x，若第三邊 x 的長度為整數，求符合要求的第三邊 x 的個數。

答： 由鈍角三角形得知：$\begin{cases} 5^2+7^2<x^2 \\ x<5+7 \end{cases}$，得 $\sqrt{74}<x<12$。

或 $\begin{cases} 5^2+x^2<7^2 \\ x+5>7 \end{cases}$，得 $2<x<\sqrt{24}$。

故第三邊 x 的取值範圍為 $2<x<\sqrt{24}$ 或 $\sqrt{74}<x<12$。

但由於 x 為整數，故 x 只可以為 3,4,9,10,11，答案為 5。

淺問

1. 設 $x\ge y$，證 $x^3-y^3\ge 3x^2y-3xy^2$。

2. 證明 $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$。

3. 證明 $\log 11\times\log 9<1$。

4. 求下列函數的最小值：

   (a) $y=\dfrac{x^2+13}{\sqrt{x^2+4}}$　　(b) $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$

5. 設 a,b,c 都是正數且 $ab+bc+ca=1$，證 $a+b+c\ge\sqrt{3}$。

6. 若 $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2=1$，證 $ax+by+cz\le 1$。

7. 已知 a,b,c 都是正數且 $abc=1$，證 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$。

8. 求函數 $y=-x-\dfrac{9}{x}+18$（$x>0$）的最大值。（五市初數聯 1991）

9. 設 a,b,c,d 都是正數，證 $(a+b+c+d)^2\le 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$。

10. 若 $a>b>c>d>0$，證明 $\dfrac{a}{d}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{d}{a}\ge 4$。

11. 已知實數 a,b,c,d 滿足於 $a+b+c+d=3$，$a^2+2b^2+3c^2+6d^2=5$，求 a 的最大值和最小值。

12. 設 $S_n=1+2+3+\dots+n$，求 $\dfrac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}$ 的最大值。（高數聯 2000）

13. 設三角形的三邊均為正整數，且最長邊長 15 ，問符合條件的三角形數目。

14. 存在整數 x，使具有邊長 10, 24, x 的三角形的所有角均為銳角，問 x 的個數。(AHSME 1988)

詳答

1. 考慮 $x^3-y^3-3x^2y+3xy^2 = (x-y)^3 \geq 0$

故 $x^3-y^3 \geq 3x^2y-3xy^2$。

2. 由 AM ≥ GM，

$$\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}) \geq \sqrt{x\times\frac{1}{x}} = 1$$

所以 $x+\frac{1}{x} \geq 2$

3. 由 AM ≥ GM，

$$\sqrt{\log 11\times\log 9} \leq \frac{1}{2}(\log 11+\log 9) = \frac{1}{2}\log 99$$

$$< \frac{1}{2}\log 100 = 1$$

所以 $\log 11\times\log 9 < 1$

4. (a) $y=\frac{x^2+13}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+4+9}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4}+\frac{9}{\sqrt{x^2+4}}$

由 AM ≥ GM，得

$$y \geq 2\sqrt{(\sqrt{x^2+4})(\frac{9}{\sqrt{x^2+4}})} = 2\sqrt{9} = 6$$

不等式等號成立，當且僅當，$\sqrt{x^2+4}=\frac{9}{\sqrt{x^2+4}}$，

即 $x^2+4=9$，$x=\pm\sqrt{5}$。

(b) $y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4}+\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}$

由 AM ≥ GM，得

$$y \geq 2\sqrt{(\sqrt{x^2+4})(\frac{4}{\sqrt{x^2+4}})}-\frac{3}{\sqrt{x^2+4}} = 2\sqrt{4}-\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}$$

不等式等號成立，當且僅當，$\sqrt{x^2+4}=\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}$，

即 $x^2+4=4$，$x=0$。

代入 y 中，得 最小值為 $4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$。

5. $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$= \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]+3(ab+bc+ca)$

$\geq 3(ab+bc+ca) = 3$

所以 $a+b+c \geq \sqrt{3}$

6. 由 AM ≥ GM，

$\frac{a^2+x^2}{2} \geq \sqrt{a^2x^2}=ax$ 所以 $a^2+x^2 \geq 2ax$，

同理 $b^2+y^2 \geq 2by$ 及 $c^2+z^2 \geq 2cz$ 。

$a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2 \geq 2ax+2by+2cz$

$2 \geq 2ax+2by+2cz$

所以 $ax+by+cz \leq 1$ 。

7. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = ab+bc+ca$

而根據 AM ≥ GM，

$ab+bc \geq 2\sqrt{abbc}=2\sqrt{b}$ ，

同理，有 $bc+ca \geq 2\sqrt{bcca}=2\sqrt{c}$ 、 $ca+ab \geq 2\sqrt{caab}=2\sqrt{a}$ 。

故 $ab+bc+bc+ca+ca+ab \geq 2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2\sqrt{c}$

即 $ab+bc+ca \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

8. y $= -(x+\frac{9}{x})+18 \leq -2\sqrt{x\times\frac{9}{x}}+18$（由 AM ≥ GM）

$= -2\sqrt{9}+18 = 12$

所以當 $x=3$，y 達最大值 12。

9. 解法一：

由柯西不等式，

$$(1a+1b+1c+1d)^2 \le (1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$
$$(a+b+c+d)^2 \le 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

解法二：

由 QM ≥ AM，

$$\frac{a+b+c+d}{4} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$$
$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \le \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$$
$$(a+b+c+d)^2 \le 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

10. 由於 $a>b>c>d>0$，即 $\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>0$，

根據排序不等式，

$\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\ge\frac{a}{a}+\frac{b}{b}+\frac{c}{c}+\frac{d}{d}=4$。

另一方法：

由 AM ≥ GM，

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\right) \ge \sqrt[4]{\frac{a}{d}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{b}\times\frac{d}{a}}=1$$

即 $\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\ge 4$。

11. 根據柯西不等式，

$$(2b^2+3c^2+6d^2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) \ge \left(\sqrt{2}b\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}c\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{6}d\times\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2$$
$$(2b^2+3c^2+6d^2) \ge (b+c+d)^2$$
$$5-a^2 \ge (3-a)^2$$
$$5-a^2 \ge 9-6a+a^2$$
$$2a^2-6a+4 \le 0$$
$$a^2-3a+2 \le 0$$

得解 $1\le a\le 2$，所以 a 的最大值為 2 ，最小值為 1。

12. $\dfrac{S_n}{(n+32)S_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{\dfrac{(n+32)(n+1)(n+2)}{2}}$

$= \dfrac{n}{(n+32)(n+2)} = \dfrac{n}{n^2+34n+64} = \dfrac{1}{n+34+\dfrac{64}{n}}$

其中因為 AM ≥ GM，$n+\dfrac{64}{n} \geq 2\sqrt{n\times\dfrac{64}{n}} = 16$

所以 $\dfrac{S_n}{(n+32)S_{n+1}} \leq \dfrac{1}{16+34} = \dfrac{1}{50}$

故最大值為 $\dfrac{1}{50}$。

13. 設三角形三邊 $0<a\leq b\leq c=15$，

根據三角不等式，我們有 $a+b>c$，所以不妨固定 a 值，數算 b 的數目。

若 a = 1，則 b = 15；

若 a = 2，則 b = 14 或 15；

若 a = 3，則 b = 13、14 或 15；

若 a = 4，則 b = 12、13、14 或 15；

若 a = 5，則 b = 11、12、13、14 或 15；

若 a = 6，則 b = 10、11、12、13、14 或 15；

若 a = 7，則 b = 9、10、11、12、13、14 或 15；

若 a = 8，則 b = 8、9、10、11、12、13、14 或 15；

若 a = 9，則 b = 9、10、11、12、13、14 或 15；

若 a = 10，則 b = 10、11、12、13、14 或 15；

若 a = 11，則 b = 11、12、13、14 或 15；

若 a = 12，則 b = 12、13、14 或 15；

若 a = 13，則 b = 13、14 或 15；

若 a = 14，則 b = 14 或 15；

若 a = 15，則 b = 15；

所以三角形數目為

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 64。

14. 由銳角三角形得知：$\begin{cases}10^2+24^2>x^2\\10^2+x^2>24^2\end{cases}$，

得 $476<x^2<676$，即 $\sqrt{476}<x<\sqrt{676}$。

x 只可為 22, 23, 24, 25，故解數為 4。