「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

代數 － 多項式的根

摘要

1. 認識代數基本定律及其一些應用。
2. 運用韋達（Viete）定理處理三次或以上的方程。
3. 認識一些相關恆等式：

   （a）$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

   （b）$a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+c^2b+b^2a$
   $=(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$

   （c）$a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+c^2b+b^2a$
   $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3)$

   （d）$a^3+b^3+c^3$
   $=(a+b+c)^3-3(a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+c^2b+b^2a)-6abc$

   （e）$a^3+b^3+c^3-3abc$
   $=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
4. 認識在條件 $a+b+c=0$ 的情況下的化簡：

   （a）$a^2+b^2+c^2 = -2(ab+bc+ca)$

   （b）$a^3+b^3+c^3 = -(a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+c^2b+b^2a)$
   $= 3abc$
5. 認識整系數方程下的根的共軛性。
6. 利用給定的根條件解三次或四次方程。

拾例

1. 若 $\begin{cases} a+b=2 \\ a^2+b^2=12 \end{cases}$，求 a^3+b^3 的值。（HKMO 2000/01 決賽個人）

答： $\begin{cases} a+b=2 \\ a^2+b^2=12 \end{cases}$

即 $(a+b)^2-2ab=12$，$ab=-4$。

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(2)(12+4)=32$

2. 若 $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=2 \\ a^3+b^3+c^3=3 \end{cases}$，求下列各式的值：

(a) $ab+bc+ca$

(b) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$

(c) abc

答： (a)

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ 1^2 &= 2+2(ab+bc+ca) \\ ab+bc+ca &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b) \\ &= a^2(a+b+c)+b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c) \\ &\quad -(a^3+b^3+c^3) \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3) \\ &= 1\times 2-3 \quad = \quad -1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc & \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ 3-3abc &= 1\times(2+\frac{1}{2}) \\ abc &= \frac{1}{6} \text{。} \end{aligned}$$

3. 若 $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$ 且 $x+y+z=7$ 及 $xy+yz+zx=-4$，求 $x^4+y^4+z^4$ 的值。

答： $xyz = (x+y+z)(xy+yz+zx) = (7)(-4) = -28$。

$$\begin{aligned}
x^4+y^4+z^4 &= (x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\\
&= [(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)]^2\\
&\quad -2[(xy+yz+zx)^2-2(xy\times yz+yz\times zx+zx\times xy)]\\
&= [(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)]^2\\
&\quad -2[(xy+yz+zx)^2-2(xyz)(x+y+z)]\\
&= [(7)^2-2(-4)]^2-2[(-4)^2-2(-28)(7)]\\
&= 53^2-2(408) = 1993
\end{aligned}$$

4. 已知 $xyz=1$，$x+y+z=3$，$x^2+y^2+z^2=13$。求 $\dfrac{1}{xy+3z}+\dfrac{1}{yz+3x}+\dfrac{1}{zx+3y}$ 的值。

答：

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^2 &= 9\\
x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) &= 9\\
13+2(xy+yz+zx) &= 9
\end{aligned}$$

所以 $xy+yz+zx = -2$

又因為 $z=3-x-y$，

所以 $\dfrac{1}{xy+3z} = \dfrac{1}{xy+9-3x-3y} = \dfrac{1}{(x-3)(y-3)}$，

同理得 $\dfrac{1}{yz+3x}=\dfrac{1}{(y-3)(z-3)}, \dfrac{1}{zx+3y}=\dfrac{1}{(z-3)(x-3)}$。

所以原式

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x-3)(y-3)}+\frac{1}{(y-3)(z-3)}+\frac{1}{(z-3)(x-3)}\\
&= \frac{(x-3)+(y-3)+(z-3)}{(x-3)(y-3)(z-3)}\\
&= \frac{x+y+z-9}{xyz-3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)-27}\\
&= \frac{3-9}{1-3(-2)+4(3)-27} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

5.　若 $x^4+ax^2+bx+c=0$ 的根，其中三個為 1, 2, 3，求 $a+c$ 的值。（AHSME 1966）（FWMT-J 1999）

答：由於 x^3 的系數為 0，即四根的和為 0 ，故第四根為 -6。

而 a = $(1)(2)+(1)(3)+(1)(-6)+(2)(3)+(2)(-6)+(3)(-6)$

= -25

c = $(1)(2)(3)(-6)$ = -36

所以 $a+c$ = $-25-36$ = -61。

6.　已知方程 $x^3-9x^2+15x+c=0$（其中 c 為常數）有一重根。求該重根的所有可能值之和。（培正 2013 初賽高中）

答：設三根為 a,a,b，

由韋達定理，得

$$\begin{cases} 2a+b=9 \\ a^2+2ab=15 \end{cases},$$

即得 $a^2+2a(9-2a)$ = 15

$a^2-4a^2+18a-15=$ 0

$-3a^2+18a-15$ = 0

a^2-6a+5 = 0

解得 $a=1,5$。故所總和為 $1+5=6$。

7.　已知方程 $x^3-6x^2+kx+10=0$ 的根成等差數列，求 k 的值。

答：設三根為 $a-d,a,a+d$，

由韋達定理，得

$$\begin{cases} (a-d)+a+(a+d)=6 \\ (a-d)(a)(a+d)=-10 \end{cases}$$

即得 $3a$ = 6

a = 2。

另 a^2-d^2 = -5

d^2 = 9

即 d = ± 3

不論 d 取何值，皆得三根為 $-1,2,5$。

k = $(-1)(2)+(2)(5)+(5)(-1)$ = 3。

8. 若 $abc \neq 0$ 及 $a+b+c=0$，求 $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ 的值。

答： 解法一：

從 $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$= 0$

所以 $a^3+b^3+c^3 = 3abc$。

$$a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) = a(\frac{b+c}{bc})+b(\frac{c+a}{ca})+c(\frac{a+b}{ab})$$

$$= -\frac{a^2}{bc}-\frac{b^2}{ca}-\frac{c^2}{ab}$$

$$= -\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

$$= -\frac{3abc}{abc} = -3$$。

解法二：

$$a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$$

$$= a(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

$$= (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = 0$$。

9. 求證 $x^3+x+1=0$ 沒有有理根。

答： 若方程有有理根 $\frac{p}{q}$，則 $p|1, q|1$。

即有理根值為 $x=\pm 1$。

令 $f(x)=x^3+x+1$，

$f(1) = 1+1+1 = 3$，

$f(-1) = -1-1+1 = -1$。

由此得知 ± 1 均不為方程的根，故該方程沒有有理根。

10. 化簡 $\frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}$ 。

答： 顯然 a,b,c 為三相異實數。

設 $f(x) = \frac{(x+b)(x+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x+c)(x+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x+a)(x+b)}{(c-a)(c-b)}$

$f(-a) = \frac{(-a+b)(-a+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(-a+c)(-a+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(-a+a)(-a+b)}{(c-a)(c-b)}$

$= 1$

同理 $f(-b)=f(-c)=1$，即 $f(x)=1$ 有三個相異的實根。

由於 $f(x)$ 為二次方程， $f(x)-1=0$ 不該有三個相異實根，

故對任何 x， $f(x)\equiv 1$。

「勇敢地正視困難，困難就會消失。」

這一直是我的人生哲學。

It has been my philosophy of life

that difficulties vanish when faced boldly.

美國科幻小說作家

阿西莫夫

(Issac Asimov 1920-1992)

淺問

1. 若 $\begin{cases} a+b=4 \\ a^2+b^2=23 \end{cases}$，求下列各式的值：

   (a) ab　　(b) a^3+b^3　　(c) a^4+b^4

   (d) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$　　(e) $a-b$　　(f) a^3-b^3

2. 若 $\begin{cases} a+b+c=10 \\ a^2+b^2+c^2=15 \\ abc=20 \end{cases}$，求 $a^3+b^3+c^3$ 的值。

3. 設 r,s,t 為方程 $8x^3+1001x+2008=0$ 的三個根，求 $(r+s)^3+(s+t)^3+(t+r)^3$ 的值。（AIME 2008）

4. 已知方程 $8x^3-14x^2+7x-1=0$ 的根成等比數列，解此方程。

5. 已知 $24x^3-14x^2-63x+45=0$ 的其中一個根為另一根的兩倍，解該方程。

6. 求滿足 $x^{256}-256^{32}=0$ 的所有實根的平方和。（AHSME 1979）

7. 若 $a+b+c=0$，化簡 $\dfrac{a^2}{2bc}+\dfrac{b^2}{2ca}+\dfrac{c^2}{2ab}$。

8. 若 α,β,γ 為方程 $x^3-ax^2+bx-c=0$ 的根，求下列各式的值：

   (a) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(b) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

   (c) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$　　(d) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}$

   (e) $\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}+\dfrac{1}{\alpha\beta}$　　(f) $\dfrac{1}{\beta^2\gamma^2}+\dfrac{1}{\gamma^2\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha^2\beta^2}$

9. 化簡 $\dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$。

詳答

1.　(a)　由於 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$，即 $23=4^2-2ab$

故得 $ab=-\frac{7}{2}$。

(b)　$a^3+b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab)$

$= 4\times[23-(-\frac{7}{2})] = 106$

(c)　$a^4+b^4 = (a+b)^4-4a^3b-4ab^3-6a^2b^2$

$= (a+b)^4-4ab(a^2+b^2)-6(ab)^2$

$= 4^4-4(-\frac{7}{2})(23)-6(-\frac{7}{2})^2$

$= 256+322-\frac{147}{2} = \frac{1009}{2}$

(d)　$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = 4\times(-\frac{2}{7}) = -\frac{8}{7}$

(e)　$a-b = \pm\sqrt{(a-b)^2} = \pm\sqrt{a^2+b^2-2ab}$

$= \pm\sqrt{23-2\times(-\frac{7}{2})} = \pm\sqrt{30}$

(f)　$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab) = \pm\sqrt{30}\times[23+(-\frac{7}{2})]$

$= \pm\frac{39\sqrt{30}}{2}$

2.　$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$15 = 10^2-2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca = \frac{85}{2}$

$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b$

$= (a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$

$= 10\times\frac{85}{2}-3\times 20$

$= 365$

$a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)^3-3(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b)-6abc$

$= 10^3-3\times 365-6\times 20 = -215$

3. 由韋達定理，可得 $\begin{cases} r+s+t=0 \\ rs+st+tr=\dfrac{1001}{8} \\ rst=\dfrac{-2008}{8}=-251 \end{cases}$。

原式 $= (-t)^3+(-r)^3+(-s)^3 = -(r^3+s^3+t^3)$

另 $r^3+s^3+t^3-3rst = (r+s+t)(r^2+s^2+t^2+rs+st+tr)$

$= 0$

所以 $r^3+s^3+t^3=3rst$，故原式 $= -3rst=-3(-251)=753$。

4. 設三根為 $\dfrac{a}{r},a,ar$，其中 $r\neq 0$。

由韋達定理，得

$\begin{cases} \dfrac{a}{r}+a+ar=-\dfrac{-14}{8}=\dfrac{7}{4} \\ (\dfrac{a}{r})(a)(ar)=-\dfrac{-1}{8}=\dfrac{1}{8} \end{cases}$，

即得 $a^3 = \dfrac{1}{8}$

$a = \dfrac{1}{2}$。

另 $a(\dfrac{1}{r}+1+r) = \dfrac{7}{4}$

$\dfrac{1+r+r^2}{r} = \dfrac{7}{2}$

$2r^2-5r+2 = 0$

$r = \dfrac{1}{2}$ 或 $r = 2$。

不論 r 取何值，皆得三根為 $\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},1$。

5. 設方程 $24x^3-14x^2-63x+45=0$ 的三個根為 a, 2a 及 b，

$\begin{cases} a+2a+b=-\dfrac{(-14)}{24} \\ (a)(2a)(b)=-\dfrac{45}{24} \end{cases}$，化簡後得 $\begin{cases} 3a+b=\dfrac{7}{12} \\ 2a^2b=-\dfrac{15}{8} \end{cases}$

由上式得知 $a>0$ 及 $b<0$。

另代 $x=a$ 及 $x=2a$ 入原式，得：

$24a^3-14a^2-63a+45=0$ 及 $24(2a)^3-14(2a)^2-63(2a)+45=0$

兩式相減得 $168a^3-42a^2-63a=0$ $a(8a^2-2a-3)=0$

由於 $a\neq 0$，故得 $8a^2-2a-3=0$ $(2a+1)(4a-3)=0$

得 $a=\dfrac{3}{4}$，$2a=\dfrac{3}{2}$，$b=-\dfrac{15}{8}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{2}{3}=-\dfrac{5}{3}$。

故方程的根為 $\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{4},-\dfrac{5}{3}$。

6. 原式可化為

$$x^{(2^8)}-(2^8)^{32} = 0$$
$$x^{(2^8)}-2^{256} = 0$$
$$x^{(2^8)}-2^{(2^8)} = 0$$
$$[x^{(2^7)}+2^{(2^7)}][x^{(2^6)}+2^{(2^6)}][x^{(2^5)}+2^{(2^5)}]\ldots[x+2][x-2] = 0$$

上式的實根只有 ± 2，故平方和 = $(2)^2+(-2)^2$ = 8。

7. 由於

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc = 0$$
$$a^3+b^3+c^3 = 3abc$$

原式 = $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}$ = $\dfrac{3abc}{2abc}$ = $\dfrac{3}{2}$。

8. (a) $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=a \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b \\ \alpha\beta\gamma=c \end{cases}$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = a^2-2b$$

(b) $\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta$

$= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3abc$

$= ab-3c$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$= (\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma+\beta^2\alpha+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta)-6\alpha\beta\gamma$

$= a^3-3(ab-3c)-6c$

$= a^3-3ab+3c$

(c) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{b}{c}$

(d) 因為 $x^3-ax^2+bx-c=0$，$ax^2+c=x^3+bx$，$ax^2+c=x(x^2+b)$，

即 $(ax^2+c)^2=x^2(x^2+b)^2$。代 $y=\frac{1}{x^2}$ 即 $x^2=\frac{1}{y}$ 入上式，

$(\frac{a}{y}+c)^2=\frac{1}{y^2}(\frac{1}{y}+b)^2$，

化簡後得 $c^2y^3+(2ac-b^2)y^2+(a^2-2b)y-1=0$，

顯然上式的根為 $\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2},\frac{1}{\gamma^2}$，

故 $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2} = -\frac{(2ac-b^2)}{c^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$

(e) $\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{a}{c}$

(f) 利用 $c^2y^3+(2ac-b^2)y^2+(a^2-2b)y-1=0$

$$\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2} = \frac{a^2-2b}{c^2}$$

或 $\frac{1}{\beta^2\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^2\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{(\alpha\beta\gamma)^2} = \frac{a^2-2b}{c^2}$

9. 顯然 a,b,c 為三相異實數。

設 $f(x) = \dfrac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

$f(a) = \dfrac{a^2(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)}$

$= a^2$

同理有 $f(b)=b^2, f(c)=c^2$。即 $f(x)=x^2$ 有三個相異的實根。

但 $f(x)$ 為二次方程，$f(x)=x^2$ 不應有三個相異的實根，

故對任何 x，$f(x)\equiv x^2$。

人類擁有明星般的未來，但最重要的是這未來會消失在年青人的愚昧和迷信之中。

Humanity has the stars in its future, and that future is too important to be lost under the burden of juvenile folly and ignorant superstition.

美國科幻小說作家

阿西莫夫

(Issac Asimov 1920-1992)