「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

三角 – 任意角的三角函數

摘要

1. 認識弧度，及其與角度的關係。
2. 三角學六函數：

   $\sin a = \frac{y}{r}, \cos a = \frac{x}{r}, \tan a = \frac{y}{x}, \cot a = \frac{x}{y}, \sec a = \frac{r}{x}, \csc a = \frac{r}{y}$
3. 認識六函數在不同象限區域的取值方法。
4. 六函數的相互關係：

   (a) $\sin a \csc a = \cos a \sec a = \cot a \tan a = 1$

   (b) $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}, \cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$

   (c) $\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \tan^2 a + 1 = \sec^2 a, 1 + \cot^2 a = \csc^2 a$
5. 利用三角恆等式進行求值、化簡等運算。

拾例

1. 若 $k=\dfrac{3\sin\theta+5\cos\theta}{2\sin\theta+\cos\theta}$ 及 $\tan\theta=3$，求 k。（HKMO 1985/86 決賽團體）

答： k $=\dfrac{3\tan\theta+5}{2\tan\theta+1}=\dfrac{3(3)+5}{2(3)+1}=2$

2. 若 $0°\le\theta\le 90°$，且 $\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，求 $\cos\theta+\sin\theta$ 的值。
（HKMO 1992/93 初賽團體）

答：

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta-\sin\theta)^2 &= \frac{5}{9}\\
\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta &= \frac{5}{9}\\
1-2\cos\theta\sin\theta &= \frac{5}{9}\\
\cos\theta\sin\theta &= \frac{2}{9}\\
\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta &= \frac{5}{9}+4(\frac{2}{9})\\
\cos\theta+\sin\theta &= \frac{\sqrt{13}}{3}
\end{aligned}
$$

3. 若 $\sin x=5\cos x$，求 $\sin x\cos x$ 的值。

答： 把 $\sin x=5\cos x$ 代入 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，得 $\cos^2 x=\dfrac{1}{26}$。

即 $\cos x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{26}}$，對應 $\sin x=\pm\dfrac{5}{\sqrt{26}}$，

所以 $\sin x\cos x=\dfrac{5}{26}$。

4. 若 $\csc x+\cot x=4$，求 $\csc x-\cot x$ 的值。

答：

$$
\begin{aligned}
\csc^2 x-\cot^2 x &= 1\\
(\csc x+\cot x)(\csc x-\cot x) &= 1\\
3(\csc x-\cot x) &= 1\\
\csc x-\cot x &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$
。

5. 已知 $270^\circ < \theta < 360^\circ$，求 $\dfrac{1}{\cos\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}} + \dfrac{2\cot\theta}{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\theta}-1}}$ 的值。

答： 原式 $= \dfrac{1}{\cos\theta|\sec\theta|} + \dfrac{2\cot\theta}{|\cot\theta|} = \dfrac{\sec\theta}{|\sec\theta|} + \dfrac{2\cot\theta}{|\cot\theta|}$

$= 1-2 = -1$

6. 化簡 $\sec^2 a - \sec^2 a\csc^2 a + \csc^2 a$。

答： 原式 $= \dfrac{1}{\cos^2 a} - \dfrac{1}{\cos^2 a\sin^2 a} + \dfrac{1}{\sin^2 a} = \dfrac{\sin^2 a - 1 + \cos^2 a}{\cos^2 a\sin^2 a}$

$= 0$。

7. 化簡 $(\csc\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$。

答： 原式 $= (\dfrac{1}{\sin\theta} - \sin\theta)(\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta)(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta})$

$= \dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \times \dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \times \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \times \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \times \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 1$。

8. 若 $b = \cos 30^\circ + \sin 300^\circ + \cos 3000^\circ + \sin 30000^\circ$，求 b。

答： b $= \cos 30^\circ - \sin 60^\circ - \cos 60^\circ + \sin 60^\circ$

$= \cos 30^\circ - \cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$。

9. 求 $2\times\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\ldots\times\tan 89^\circ$ 的值。（HKMO 2011/12 決賽團體）

答： 由於 $\tan(90^\circ - x)\times\tan x = \cot x\times\tan x = 1$

原式 $= 2\times(\tan 1^\circ\tan 89^\circ)\times\ldots\times\tan 45^\circ = 2$

10. 求 $\cos^2 0^\circ + \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ$
$+ \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ$ 的值。

答： 原式 $= 1 + \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ$
$+ \sin^2 40^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 10^\circ + 0$

$= 1+1+1+1+1 = 5$。

淺問

1. 下表中的 x， $0° \le x \le 90°$，完成下表：

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
$\sin x = a$	a					
$\cos x = a$		a				
$\tan x = a$			a			
$\cot x = a$				a		
$\sec x = a$					a	
$\csc x = a$						a

2. 若 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$，且 $0 \le x \le \pi$，求 $\tan x$。（HKMO 1991/92 初賽個人）

3. 若 $\tan A = 3$，求 $\frac{\sin A + 2\cos A}{3\cos A - 4\sin A}$ 的值。

4. 若 $0 \le x \le \pi$ 及 $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$，求 $\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1+\cos x}$ 的值。

5. 如果 x 是滿足 $\sec x - \tan x = 2$ 的實數，求 $\sec x + \tan x$ 的值。
（AHSME 1999）

6. 若 $\cos^6 x + \sin^6 x = 0.4$， 及 $d = 2 + 5\cos^2 x \sin^2 x$。求 d 的值。
（HKMO 1999/2000 決賽團體）

7. 求 $\sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \sec\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}\csc\frac{\pi}{3}$ 的值。

8. 化簡下列各式：

(a) $(1 - \cot x + \csc x)(1 - \tan x + \sec x)$ (b) $\frac{1 - \sin^6 x - \cos^6 x}{1 - \sin^4 x - \cos^4 x}$

(c) $\frac{4 - 5\cos x}{3 - 5\sin x} + \frac{3 + 5\sin x}{4 + 5\cos x}$ (d) $\frac{1 - \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} + 2\cos^2 x$

9. 求 $\sin^2 1° + \sin^2 2° + \sin^2 3° + ... + \sin^2 89°$ 的值。（HKMO 2009/10 決賽團體）

10. 設 $A + B = 90°$，及 $\sin A = \frac{1}{3}$，求 $\frac{\cot A \cot B + 1}{\cot A + \cot B}$ 的值。

詳答

1.

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\csc x$
$\sin x = a$	a	$\sqrt{1-a^2}$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$	$\dfrac{1}{a}$
$\cos x = a$	$\sqrt{1-a^2}$	a	$\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$	$\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$	$\dfrac{1}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$
$\tan x = a$	$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	a	$\dfrac{1}{a}$	$\sqrt{1+a^2}$	$\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}$
$\cot x = a$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$	$\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$	$\dfrac{1}{a}$	a	$\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}$	$\sqrt{1+a^2}$
$\sec x = a$	$\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$	$\dfrac{1}{a}$	$\sqrt{1-a^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$	a	$\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$
$\csc x = a$	$\dfrac{1}{a}$	$\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$	$\sqrt{1-a^2}$	$\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$	a

2.

$$(\sin x+\cos x)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x = \frac{1}{25}$$

$$1+2\sin x\cos x = \frac{1}{25}$$

$$\sin x\cos x = -\frac{12}{25}$$

代 $\cos x=\frac{1}{5}-\sin x$，得

$$\sin x(\frac{1}{5}-\sin x) = -\frac{12}{25}$$

$$25\sin^2 x-5\sin x-12 = 0$$

$\sin x=-\frac{3}{5}$（捨去） 或 $\sin x=\frac{4}{5}$

則 $\cos x=-\frac{3}{5}$，而 $\tan x=-\frac{4}{3}$。

3. $$\frac{\sin A+2\cos A}{3\cos A-4\sin A} = \frac{\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{2\cos A}{\cos A}}{\frac{3\cos A}{\cos A}-\frac{4\sin A}{\cos A}} = \frac{\tan A+2}{3-4\tan A}$$
$$= \frac{(3)+2}{3-4(3)} = -\frac{5}{9}$$

4. 考慮 $(\sin x+\cos x)^2 = \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$
$$= 1+2(\frac{1}{2}) = 2$$
所以 $\sin x+\cos x = \pm\sqrt{2}$ 。

但由於 $0\le x\le\pi$ ，故 $\sin x\ge 0$ ，因而 $\cos x\ge 0$ ，所以 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ 。
$$\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1+\cos x+1+\sin x}{(1+\cos x)(1+\sin x)}$$
$$= \frac{2+\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x+\sin x\cos x}$$
$$= \frac{2+\sqrt{2}}{\frac{3}{2}+\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(4+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2} = 4-2\sqrt{2}$$

5. 由於 $\sec^2 x-\tan^2 x = 1$
$$(\sec x-\tan x)(\sec x+\tan x) = 1$$
$$\sec x+\tan x = \frac{1}{2}$$

6. $$\cos^6 x+\sin^6 x = (\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x)$$
$$= \cos^4 x-\cos^2 x\sin^2 x+\sin^4 x$$
$$= (\cos^2 x+\sin^2 x)^2-3\cos^2 x\sin^2 x$$
$$= 1-3\cos^2 x\sin^2 x$$
即 $1-3\cos^2 x\sin^2 x=0.4$ ，故得 $\cos^2 x\sin^2 x=0.2$ 。

即 d $= 2+5(0.2) = 3$ 。

7. $\sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\sec\frac{\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}\csc\frac{\pi}{3}$

$$= \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\times 1\times\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad = \frac{1}{4}+\frac{4}{3}$$

$$= \frac{19}{12}$$

8. (a) $(1-\cot x+\csc x)(1-\tan x+\sec x)$

$$= \frac{\sin x-\cos x+1}{\sin x}\times\frac{\cos x-\sin x+1}{\cos x} \qquad = \frac{1-(\sin x-\cos x)^2}{\sin x\cos x}$$

$$= \frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x} \qquad = 2$$

(b) $\frac{1-\sin^6 x-\cos^6 x}{1-\sin^4 x-\cos^4 x} = \frac{1-(\sin^6 x+\cos^6 x)}{1-(\sin^4 x+\cos^4 x)}$

$$= \frac{1-(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)}{1-(\sin^4 x+\cos^4 x)}$$

$$= \frac{1-(\sin^2 x+\cos^2 x)^2+3\sin^2 x\cos^2 x}{1-(\sin^2 x+\cos^2 x)^2+2\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$= \frac{3\sin^2 x\cos^2 x}{2\sin^2 x\cos^2 x} \qquad = \frac{3}{2}$$

(c) $\frac{4-5\cos x}{3-5\sin x}+\frac{3+5\sin x}{4+5\cos x}$

$$= \frac{(4-5\cos x)(4+5\cos x)+(3+5\sin x)(3-5\sin x)}{(3-5\sin x)(4+5\cos x)}$$

$$= \frac{4^2-5^2\cos^2 x+3^2-5^2\sin^2 x}{(3-5\sin x)(4+5\cos x)}$$

$$= \frac{16+9-25(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(3-5\sin x)(4+5\cos x)} \qquad = \frac{16+9-25}{(3-5\sin x)(4+5\cos x)}$$

$$= 0$$

(d) $\frac{1-\cot^2 x}{1+\cot^2 x}+2\cos^2 x$

$$= \frac{1-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}+2\cos^2 x \qquad = \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}+2\cos^2 x$$

$$= \sin^2 x-\cos^2 x+2\cos^2 x \qquad - \qquad \sin^2 x+\cos^2 x$$

$$= 1$$

9. 由於 $\sin x = \cos(90° - x)$

故原式 $= \sin^2 1° + \sin^2 2° + \sin^2 3° + ... + \sin^2 45°$

$+ \cos^2 44° + \cos^2 43 + \cos^2 42 + ... + \cos^2 1$

$= 44 \times 1 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 44.5$

10. $$\frac{\cot A \cot B + 1}{\cot A + \cot B} = \frac{1 + \cos A \cos B}{\cos A \sin B + \cos B \sin A}$$

$$= \frac{1 + \cos A \cos(90° - A)}{\cos A \sin(90° - A) + \cos(90° - A) \sin A}$$

$$= \frac{1 + \cos A \sin A}{\cos^2 A + \sin^2 A} = 1 + \cos A \sin A$$

$$= 1 + \sin A \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2} = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

保有思考的權利，因爲就算想錯了，

也總比完全不思考來得好。

古希臘數學家、天文學家

希帕蒂婭（Hypatia 約 370-415）