「噢！數？」拾例集　　　周浩然輯

三角 － 三角法

摘要

1. 利用三角函數不等式計算三角函數的最值：
   (a) $|\sin x| \le 1$、$|\cos x| \le 1$
   (b) 若 $0° \le a, b \le 90°$，
      (i) $\tan a \tan b \le \tan^2 \frac{a+b}{2}$，當 $a+b \le 90°$。
      (ii) $\tan a \tan b \ge \tan^2 \frac{a+b}{2}$，當 $a+b \ge 90°$。
2. 利用三角恆等式進行最值計算：
   (a) $A\sin a \pm B\cos a = \sqrt{A^2+B^2}\sin(a \pm \theta), \theta = \tan^{-1}(\frac{B}{A})$
   (b) $A\cos a \pm B\sin a = \sqrt{A^2+B^2}\cos(a \mp \theta), \theta = \tan^{-1}(\frac{B}{A})$
3. 利用三角函數代換進行代數式的最值計算。

拾例

1. 考慮函數 $y=\cos x+\sqrt{3}\sin x$。設 a 為 y 的最大值。求 a 的值。

答： y $= \cos x+\sqrt{3}\sin x = 2(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)$

$= 2(\cos 60°\cos x+\sin 60°\sin x)$

$= 2\cos(x-60°)$

所以 $a=2$。

2. 已知 $-1\le x,y\le 1$，求 $f(x,y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$ 的最大值與最小值。

答： 設 $x=\sin a, y=\sin b$，

則 $f(x,y) = \sin a\sqrt{1-\sin^2 b}+\sin b\sqrt{1-\sin^2 a}$

$= \sin a\cos b+\sin b\cos a = \sin(a+b)$

故最大值為 1，最小值為 −1。

3. 求 $y=x-2+\sqrt{4-x^2}$ 的最大值與最小值。

答： 令 $x=2\cos\theta$ 其中 $-2\le x\le 2$，即 $0\le\theta\le\pi$。

則 y $= 2\cos\theta-2+\sqrt{4-(2\cos\theta)^2}$

$= 2\cos\theta-2+2\sin\theta$

$= 2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-2$

因為 $0\le\theta\le\pi$，所以 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le 1$。

故 y 的最大值為 $2\sqrt{2}\times 1-2 = 2\sqrt{2}-2$。

故 y 的最小值為 $2\sqrt{2}\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})-2 = -4$。

4. 設 $x^2+y^2\le 16$，及 $4x+3y$ 的最大值為 a，最小值為 b。求 ab 的值。'

答： 設 $x=4\sin\theta, y=4\cos\theta$，即求 $16\cos\theta+12\sin\theta$ 的最值。

最大值 a $= \sqrt{16^2+12^2} = 20$。

最小值 b $= -\sqrt{16^2+12^2} = -20$。

即 $ab = (20)(-20) = -400$。

5. 求函數 $\sin^2 x-\cos x+10$ 的最大值和最小值。

答： 原式 $= 1-\cos^2 x-\cos x+10 = -\cos^2 x-\cos x+11$

$= -(\cos^2 x+\cos x+\frac{1}{4})+11+\frac{1}{4}$

$= -(\cos x+\frac{1}{2})^2+\frac{45}{4}$。

由於 $-1\le\cos x\le 1$，即 $-\frac{1}{2}\le\cos x+\frac{1}{2}\le\frac{3}{2}$，

故上式的最大值為 $\frac{45}{4}-0^2 = \frac{45}{4}$。

而最小值為 $\frac{45}{4}-(\frac{3}{2})^2 = \frac{36}{4} = 9$。

6. 求函數 $\sin^2 x-4\cos x+10$ 的最大值和最小值。

答： 原式 $= 1-\cos^2 x-4\cos x+10 = -\cos^2 x-4\cos x+11$

$= -(\cos^2 x+4\cos x+4)+11+4$

$= -(\cos x+2)^2+15$。

由於 $-1\le\cos x\le 1$，即 $1\le\cos x+2\le 3$，

故上式的最大值為 $15-1^2 = 14$。

而最小值為 $15-3^2 = 6$。

7. 求函數 $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}$ 的最大值。

答： 設 $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+45°)$

$t^2 = \sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x$

$= 1+2\sin x\cos x$

所以 $\sin x\cos x = \dfrac{t^2-1}{2}$

即 $f(x) = \dfrac{t^2-1}{2}\times\dfrac{1}{1+t}$

$= \dfrac{t-1}{2}$

由於 t 的最大值為 $\sqrt{2}$，所以 $f(x)$ 的最大值為 $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$。

8. 若 $x+y=\frac{\pi}{2}$，求 $\sin x+\sin y$ 的最大值。

答： 原式 $= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}$

$= 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}$。

故當 $x=y=\frac{\pi}{4}$，原式得最大值為 $\sqrt{2}$。

9. 求 $y=\frac{3\sin x-1}{3\sin x+1}$（其中 $\sin x\neq-\frac{1}{3}$）的值域。

答：

$$\begin{aligned}
y(3\sin x+1) &= 3\sin x-1\\
3y\sin x+y &= 3\sin x-1\\
3y\sin x-3\sin x &= -1-y\\
(3y-3)\sin x &= -1-y\\
\sin x &= \frac{1+y}{2(1-y)}
\end{aligned}$$

即由 $|\sin x|\leq 1$，

得

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1+y}{3(1-y)}\right| &\leq 1\\
[\frac{1+y}{3(1-y)}]^2 &\leq 1\\
\frac{(1+y)^2}{9(1-y)^2} &\leq 1\\
1+2y+y^2 &\leq 9-18y+9y^2\\
8y^2-20y+8 &\geq 0\\
2y^2-5y+2 &\geq 0
\end{aligned}$$

解得 $y\leq\frac{1}{2}$ 或 $y\geq 2$。

10. 已知 a,b 為銳角且 $a+b=90°$，求 $\tan a\tan b$ 的最大值。

答： $\tan a\tan b \leq \tan^2\frac{a+b}{2} = \tan^2 45° = 1$

所以 $\tan a\tan b$ 的最大值 1，當 $a=b=45°$ 時。

淺問

1. 求下列各式的最大值和最小值：
   (a) $\sin a+\cos a$　　(b) $3\cos a-4\sin a$
   (c) $2\cos^2 a-\sin a$　　(d) $\sin^2 a+\cos^2 a$

2. 若函數 $y=\dfrac{1+2\sin x}{2+\sin x}$ 的最大值為 a，最小值為 b，求 $a+b$ 的值。

3. 求函數 $y=\dfrac{\sec^2 x+\tan x}{\sec^2 x-\tan x}$ 的最大值。

4. $y=5\sin x+\cos 2x$ 的最小值。

5. 若 a 是 $\dfrac{1}{2}\sin^2 3\theta-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta$ 的絕對最大值，求 a 的值。
   (HKMO 1997/98 決賽個人)

6. 求 $y=\dfrac{\sin 2x\sin x}{1-\cos x}$ 的值域。

7. 試以三角法求下列各式的最大值和最小值：
   (a) $y=x\sqrt{9-x^2}$　　(b) $y=x+\sqrt{9-x^2}$

8. 已知 $1\le x^2+y^2\le 4$，求 $u=x^2+xy+y^2$ 的值域。

9. 已知 $|x|\le 1,|y|\le 1$，求函數 $f(x,y)=xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ 的最小值。

10. 若 $|x|\le\dfrac{\pi}{2}$，求 $y=2\sin 2x+2\sin x+2\cos x$ 的最大值。

11. 已知 $(x-1)^2+y^2=4$，其中 x,y 均為實數。若 $2x+y^2$ 的最大值為 b，求 b 的值。(HKMO 2002/03 決賽團體)

12. 若 $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$，其中 $0\le x,y\le 1$。求 x^2+y^2 的值。
    (HKMO 2009/10 初賽個人)

詳答

1. (a) $\sin a+\cos a = \sqrt{1^2+1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\sin a+\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\cos a\right)$

$= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\sin a+\sin\frac{\pi}{4}\cos a)$

$= \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+a)$

故其最大值為$\sqrt{2}$，最小值為$-\sqrt{2}$。

(b) $3\cos a-4\sin a = \sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos a-\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin a\right)$

$= 5(\cos x\cos a-\sin x\sin a)$

$= 5\cos(a-x)$，其中 $\tan x=\frac{4}{3}$。

故其最大值為 5，最小值為 -5。

(c) $2\cos^2 a-\sin a = 2(1-\sin^2 a)-\sin a$

$= -2\sin^2 a-\sin a+2$

$= -2(\sin^2 a+\frac{1}{2}\sin a+\frac{1}{16})+2+\frac{1}{8}$

$= -2(\sin a+\frac{1}{4})^2+\frac{17}{8}$

由於 $-1\le\sin a\le 1$，所以

$2\cos^2 a-\sin a$ 的最大值為 $-2(0)^2+\frac{17}{8} = \frac{17}{8}$，

$2\cos^2 a-\sin a$ 的最小值為 $-2(1+\frac{1}{4})^2+\frac{17}{8} = -1$。

(d) $\sin^2 a+\cos^2 a = 1$

故其最大值和最小值均為 1。

2. y $= \frac{2(2+\sin x)-3}{2+\sin x} = 2-\frac{3}{2+\sin x}$

故 y 的最大值 $a=2-\frac{3}{2+(1)}=1$；最小值 $b=2-\frac{3}{2+(-1)}=-1$。

所以 $a+b=1+(-1)=0$。

3. 即 $y=\dfrac{\tan^2 x+\tan x+1}{\tan^2 x-\tan x+1}$，得 $y\tan^2 x-y\tan x+y=\tan^2 x+\tan x+1$

即 $(1-y)\tan^2 x+(1+y)\tan x+(1-y)=0$

當 $y=1$ 時，上式化簡為 $\tan x=0$，成立。

取
$$\begin{aligned}\Delta=(1+y)^2-4(1-y)(1-y) &\ge 0\\ 1+2y+y^2-4+8y-4y^2 &\ge 0\\ 3y^2-10y+3 &\le 0\\ (3y-1)(y-3) &\le 0\end{aligned}$$

故解得 $\dfrac{1}{3}\le y\le 3$， 所以最大值為 3。

4. y $= 5\sin x+1-2\sin^2 x = -2(\sin^2 x-\dfrac{5}{2}\sin x)+1$

$= -2(\sin^2 x-\dfrac{5}{2}\sin x+\dfrac{25}{16})+1+\dfrac{25}{8}$

$= -2(\sin x-\dfrac{5}{4})^2+\dfrac{33}{8}$

故 y 的最小值為 $-2(-1-\dfrac{5}{4})^2+\dfrac{33}{8} = -6$。

5. 若 $\sin^2 3\theta=1$ 及 $\cos 2\theta=-1$，a 得最大值 $\dfrac{1}{2}(1)-\dfrac{1}{2}(-1)=1$。

從 $\sin^2 3\theta=1$，即 $\sin 3\theta=\pm 1$，

解得 $3\theta=180°n+90°$，即 $\theta=60°n+30°$；

從 $\cos 2\theta=-1$，解得 $2\theta=360°n+180°$，即 $\theta=180°n+90°$；

其中 n 為任意整數。

故得 $n=90°$，同時符合兩式要求，即最大值存在。

6. y $= \dfrac{2\sin x\cos x\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{2\cos x(1-\cos^2 x)}{1-\cos x}$

$= 2\cos x(1+\cos x) = 2(\cos^2 x+\cos x+\dfrac{1}{4})-\dfrac{1}{2}$

$= 2(\cos x+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{2}$

由此最大值為 $2(1+\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{2}=4$，而最小值為 $-\dfrac{1}{2}$。

但由於 $\cos x\ne 1$，故 $y\ne 4$，即有 $-\dfrac{1}{2}\le y<4$。

7. (a) 設 $x=3\cos\theta$，由於 $-3\le x\le 3$，所以 $0\le\theta\le\pi$。

$$y = 3\cos\theta\sqrt{9-(3\cos\theta)^2} = 3\cos\theta\times 3\sin\theta$$
$$= \frac{9\sin 2\theta}{2}$$

由於 $0\le\theta\le\pi$，所以 $-1\le\sin 2\theta\le 1$。

故 y 的最大值為 $-\frac{9}{2}$，最小值為 $\frac{9}{2}$。

(b) 設 $x=3\cos\theta$，由於 $-3\le x\le 3$，所以 $0\le\theta\le\pi$。

$$y = 3\cos\theta+\sqrt{9-(3\cos\theta)^2} = 3\cos\theta+3\sin\theta$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$$

由於 $0\le\theta\le\pi$，所以 $-\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\le 1$。

故 y 的最大值為 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，最小值為 $\frac{3\sqrt{2}}{2}\times(-\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{3}{2}$。

8. 令 $x=a\sin\theta, y=a\cos\theta$，

而 $x^2+y^2 = a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta = a^2$，

故得 $1\le a^2\le 4$。

而 $u=x^2+xy+y^2 = a^2\sin^2\theta+a^2\sin\theta\cos\theta+a^2\cos^2\theta$
$$= a^2(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta)$$

故當 $a,\sin 2\theta$ 分取最大值，即 $x=y=2$，

u 得最大值 $2^2(1+\frac{1}{2})=6$；

另當 $a,\sin 2\theta$ 分取最小值，即 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

u 得最小值 $1^2(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$。

即得 $\frac{1}{2}\le u\le 6$。

9. 令 $x=\cos\alpha, y=\cos\beta$，

$$f(x,y) = \cos\alpha\cos\beta+\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}$$
$$= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

故 $f(x,y)$ 的最小值為 -1。

10. y $= 2\sin 2x + 2\sin x + 2\cos x = 4\sin x\cos x + 2\sin x + 2\cos x$

$= 2(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x) - 2$

$= 2(\sin x + \cos x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{2}$

$= 2[\sqrt{2}\sin(x + 45°) - \frac{1}{2}]^2 - \frac{5}{2}$

故 y 的最大值 $= 2[-\sqrt{2} - \frac{1}{2}]^2 - \frac{5}{2} = 2[2 + \sqrt{2} + \frac{1}{4}] - \frac{5}{2}$

$= 2\sqrt{2} + 2$

11. 解法一：

令 $x = 2\sin\theta + 1, y = 2\cos\theta$，

故 $2x + y^2 = 2(2\sin\theta - 1) + (2\cos\theta)^2$

$= 4\sin\theta + 2 + 4\cos^2\theta$

$= 4\sin\theta + 2 + 4(1 - \sin^2\theta)$

$= -4\sin^2\theta + 4\sin\theta + 6$

$= -(2\sin\theta - 1)^2 + 7$

故最大值 $b = 7$。

解法二：

$2x + y^2 = 2x + 4 - (x-1)^2 = 2x + 4 - x^2 + 2x - 1$

$= -x^2 + 4x + 3 = -(x-2)^2 + 7$

故最大值 $b = 7$。

（註：此問題若求最小值，必須使用三角法，代 $\sin\theta = -1$，得最小值 -2。）

12. 令 $x = \sin A, y = \sin B$，原式可化簡為

$\sin A\sqrt{1 - \sin^2 B} + \sin B\sqrt{1 - \sin^2 A} = 1$

$\sin A\cos B + \sin B\cos A = 1$

$\sin(A + B) = 1$

即 $A + B = 90°$

另一方面，$x^2 + y^2 = \sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 A + \sin^2(90° - A)$

$= \sin^2 A + \cos^2 A = 1$