「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

三角 － 反三角函數解三角方程

摘要

1.　反三角函數的值域：

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x, \arctan x \le \frac{\pi}{2} \text{ ，} 0 \le \arccos x, \arctan x \le \pi$$

2.　反三角函數和三角函數的關係：

3.　反三角函數恆等式：

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \text{ ，} \arctan x + arc\cot x = \frac{\pi}{2}$$

4.　解含有反三角函數的算式。

5.　解三角方程。

6.　三角方程的通解和化簡通解式：

（a）　$\sin x = a \quad x = 180°k + (-1)^k \sin^{-1} a = k\pi + (-1)^k \sin^{-1} a$

（b）　$\cos x = a$ ， $x = 360°k \pm \cos^{-1} a = 2k\pi \pm \cos^{-1} a$

（c）　$\tan x = a$ ， $x = 180°k + \tan^{-1} a = k\pi + \tan^{-1} a$

其中　$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

7.　使用萬用變換解三角方程：

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ ，} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ ，} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

其中　$t = \tan\frac{x}{2}$ 。

拾例

1. 求 $\arcsin(\sin 2000°)$ 的值。（高數聯 2000）

答： $\sin 2000° = \sin(2000° - 360° \times 5) = \sin 200° = \sin(-20°)$，

所以 $\arcsin(\sin 2000°) = -20°$。

2. 求 $arc\cot\frac{1}{7} + \arctan\frac{4}{3}$ 的值。

答： $\tan(\arctan 7 + \arctan\frac{4}{3}) = \dfrac{7+\frac{4}{3}}{1-7\times\frac{4}{3}} = \dfrac{25/3}{-25/3}$

$= -1$。

所以上式的值為 $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$。

3. 求正整數 n 使 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$。

答： $\tan(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{n}) = 1$

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}} = 1$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2n}$$

$$\frac{n+2}{2n} = \frac{2n-1}{2n}$$

$$n+2 = 2n-1$$

n = 3。

4. 設 $\sin(\theta + 20°) = \sin(\theta - 12°)$ 且 $0° \le \theta \le 90°$，求 θ 的值。

答： 顯然 $\theta + 20° = \theta - 12°$ 不可能。

所以 $\theta + 20° + \theta - 12° = 180°$

$2\theta = 172°$

$\theta = 86°$

5. 已知 $4\sin^3 x+6\sin^2 x-2\sin x-3=0$ 及 $0\le x\le 2\pi$，求 x 的值。

答： $(2\sin^2 x-1)(2\sin x+3) = 0$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}$ 或 $\sin x = -\frac{3}{2}$（捨去）

$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

即 x $= \frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ 。

6. 若 $0°\le x\le 360°$ 且滿足三角方程 $\tan x-\sqrt{3}\cot x=\sqrt{3}-1$，求 x 的所有可能值之和。

答： $\tan x-\frac{\sqrt{3}}{\tan x}-(\sqrt{3}-1) = 0$

$\tan^2 x-(\sqrt{3}-1)\tan x-\sqrt{3} = 0$

$(\tan x-\sqrt{3})(\tan x+1) = 0$

$\tan x=\sqrt{3}$ 或 $\tan x=-1$

$x=60°,240°$ 或 $x=135°,315°$

所以 $x=60°,135°,240°,315°$

故 x 的所有可能值之和為 $60°+135°+240°+315° = 750°$ 。

7. 共有 N 個 α 值可滿足 $\cos^3\alpha-\cos\alpha=0$，其中 $0°\le\alpha\le 360°$。求 N。
(HKMO 1986/87 決賽團體)

答： $\cos\alpha(\cos^2\alpha-1)=0$，故解得 $\cos\alpha=-1,0,1$。

對於 $\cos\alpha=-1$，$\theta=180°$；

對於 $\cos\alpha=0$，$\theta=90°,270°$；

對於 $\cos\alpha=1$，$\theta=0°,360°$。

所以 $\theta=0°,90°,180°,270°,360°$，即 $N=5$。

8. 求最大的三位數 n，使得 $\tan 1997°=\cot n°$。

答： $\tan 1997° = \tan 197° = \sin 17° = \cot 73°$

在 $0°$ 至 $360°$ 間，

$\cot 73° = \cos 253°$

是故我們有 253、433、613、793、973、…

所以最大的三位數 $n=973$。

9.　解三角方程 $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$。

答：

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos 2x}{2}+\sin^2 2x &= \frac{1-\cos 6x}{2} \\
\sin^2 2x-\frac{\cos 2x-\cos 6x}{2} &= 0 \\
\sin^2 2x-\sin 2x\sin 4x &= 0 \\
\sin 2x(\sin 2x-\sin 4x) &= 0 \\
-2\sin 2x\sin x\cos 3x &= 0
\end{aligned}$$

$\sin x=0$　或　$\sin 2x=0$　或　$\cos 3x=0$

由 $\sin x=0$，得 $x=k\pi$；

由 $\sin 2x=0$，得 $2x=k\pi$ 或 $x=\frac{k\pi}{2}$；

由 $\cos 3x=0$，得 $3x=\frac{2k+1}{2}\pi$ 或 $x=\frac{2k+1}{6}\pi$。

另 $x=\frac{k\pi}{2}$ 可包含在 $x=k\pi$ 和 $x=\frac{2k+1}{6}\pi$ 內，

故總結得 $x=k\pi$ 或 $x=\frac{2k+1}{6}\pi$，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$。

10.　若 $4\cos x+5\sin x=4$，求 $\tan x$ 的最小值。

答：設 $t=\tan\frac{x}{2}$，則

原式化為

$$\begin{aligned}
\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{5(2t)}{1+t^2} &= 4 \\
4-4t^2+10t &= 4+4t^2 \\
8t^2-10t &= 0 \\
t(4t-5) &= 0
\end{aligned}$$

$t=0$　或　$t=\frac{5}{4}$

而　$\tan x=\frac{2(0)}{1-(0)^2}=0$

或　$\tan x=\frac{2(\frac{5}{4})}{1-(\frac{5}{4})^2}=-\frac{8}{5}$。

故 $\tan x$ 的最小值為 $-\frac{8}{5}$。

淺問

1. 求下列各式的值：

(a) $\arcsin(\sin\frac{\pi}{3})$　　(b) $\arccos(\cos\frac{6\pi}{5})$

2. 試以 x 表示下列各式：

(a) $\cos(\arcsin x)$　　(b) $\cos(\arctan x)$

(c) $\sin(\arctan x)$　　(d) $\sin(\arccos x)$

(e) $\tan(\arccos x)$　　(f) $\tan(\arcsin x)$

3. 求下列各式的值：

(a) $\arcsin\frac{5}{13}+2\arctan\frac{2}{3}$

(b) $\arcsin\frac{4}{5}+\arctan\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}$

(c) $\arcsin 2+\arctan 3$

4. 求下式的和：

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{6}+\arcsin\frac{\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}+\ldots+\arcsin\frac{\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}}{n(n+1)}$$

5. 已知 $\arcsin(\sin a+\sin b)+\arcsin(\sin a-\sin b)=\frac{\pi}{2}$，求 $\sin^2 a+\sin^2 b$ 的值。

6. 解下列三角方程：

(a) $\sin|x|=1$　　(b) $\tan 2x=1$

(c) $\cos^2 x=\frac{3}{4}$　　(d) $\cot^2 3x=3$

(e) $\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$

(f) $\tan\frac{3x}{5}\cot\frac{5x}{3}=1-\sec\frac{3x}{5}\csc\frac{5x}{3}$

(g) $\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x=\frac{1}{4}$

(h) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$

7. 若 $3\sin x+4\cos x=5$，求 $\tan x$ 的值。

詳答

1. (a) $\arcsin(\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$。因 $\frac{\pi}{3}$ 在 $\arcsin x$ 的值域內。

   (b) $\arccos(\cos\frac{6\pi}{5}) = \arccos[\cos(2\pi-\frac{6\pi}{5})]$

   $= \arccos[\cos\frac{4\pi}{5}] = \frac{4\pi}{5}$

   因 $\frac{6\pi}{5}$ 不在 $\arccos x$ 的值域內。

2. (a) $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ (b) $\cos(\arctan x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

   (c) $\sin(\arctan x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

   (e) $\tan(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ (f) $\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

3. (a) 原式 $= \arctan\frac{5}{\sqrt{13^2-5^2}}+\arctan\frac{2\times\frac{2}{3}}{1-(\frac{2}{3})^2}$

   $= \arctan\frac{5}{12}+\arctan\frac{12}{5} = \frac{\pi}{2}$

   (b) 原式 $= \arcsin[\frac{4}{5}\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}+\frac{5}{13}\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}]+\arcsin\frac{16}{65}$

   $= \arcsin(\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\times\frac{3}{5})+\arcsin\frac{16}{65}$

   $= \arcsin\frac{63}{65}+\arcsin\frac{16}{65}$

   $= \arcsin[\frac{63}{65}\sqrt{1-(\frac{16}{65})^2}+\frac{16}{65}\sqrt{1-(\frac{63}{65})^2}]$

   $= \arcsin[\frac{63}{65}\times\frac{63}{65}+\frac{16}{65}\times\frac{16}{65}]$

   $= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

   (c) 原式 $= \arctan\frac{2+3}{1-2\times3} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

4. 證明 $\arcsin\frac{\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}}{k(k+1)}=\arcsin\frac{1}{k}-\arcsin\frac{1}{k+1}$，

左方的正弦值為

$$\sin[\arcsin\frac{\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}}{k(k+1)}] = \frac{\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}}{k(k+1)}$$

右方的正弦值為

$$\sin(\arcsin\frac{1}{k}-\arcsin\frac{1}{k+1})$$

$$= \sin(\arcsin\frac{1}{k})\cos(\arcsin\frac{1}{k+1})-\cos(\arcsin\frac{1}{k})\sin(\arcsin\frac{1}{k+1})$$

$$= \frac{1}{k}\times\sqrt{1-(\frac{1}{k+1})^2}-\frac{1}{k+1}\sqrt{1-(\frac{1}{k})^2} = \frac{\sqrt{(k+1)^2-1}}{k(k+1)}-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k(k+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{(k+1)^2-1}-\sqrt{k^2-1}}{k(k+1)}$$

所以上式得證。故原式為

$$(\arcsin\frac{1}{1}-\arcsin\frac{1}{2})+(\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\frac{1}{3})+\ldots+(\arcsin\frac{1}{n}-\arcsin\frac{1}{n+1})$$

$$= \arcsin\frac{1}{1}-\arcsin\frac{1}{n+1} = \frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{n+1}$$

$$= \arccos\frac{1}{n+1}$$

5. $\arcsin(\sin a+\sin b) = \frac{\pi}{2}-\arcsin(\sin a-\sin b)$

$\sin a+\sin b = \cos[\arcsin(\sin a-\sin b)]$

$\sin a+\sin b = \sqrt{1-(\sin a-\sin b)^2}$

$(\sin a+\sin b)^2+(\sin a-\sin b)^2=1$

即 $\sin^2 a+\sin^2 =\frac{1}{2}$

6. (a) $\sin|x|=1$，即 $|x|=\dfrac{(4k+1)}{2}\pi$，或 $x=\pm\dfrac{(4k+1)}{2}\pi$，其中 $k=0,1,2,\ldots$

(b) $\tan 2x=1$，即 $2x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，或 $x=\dfrac{(4k+1)}{8}\pi$，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

(c) $\cos^2 x=\dfrac{3}{4}$，即 $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，或 $x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

(d) $\cot^2 3x=3$，即 $\tan 3x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，或 $3x=k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，

即 $x=\dfrac{(6k+1)\pi}{18}$，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

(e)
$$\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$$

$\sin 2x=0$ 或
$$\begin{aligned}\sin x\sin 3x &= \frac{1}{2}\cos 2x\\ 2\sin x\sin 3x-\cos 2x &= 0\\ \cos 2x-\cos 4x-\cos 2x &= 0\\ \cos 4x &= 0\end{aligned}$$

由 $\sin 2x=0$，解得 $2x=k\pi$，即 $x=\dfrac{k\pi}{2}$；

由 $\cos 4x=0$，解得 $4x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{(2k+1)\pi}{8}$。

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

(f)
$$\begin{aligned}\frac{\sin\frac{3x}{5}\cos\frac{5x}{3}}{\cos\frac{3x}{5}\sin\frac{5x}{3}} &= 1-\frac{1}{\cos\frac{3x}{5}\sin\frac{5x}{3}}\\ \sin\frac{3x}{5}\cos\frac{5x}{3} &= \cos\frac{3x}{5}\sin\frac{5x}{3}-1\\ \sin\frac{3x}{5}\cos\frac{5x}{3}-\cos\frac{3x}{5}\sin\frac{5x}{3} &= -1\\ \sin(\frac{3x}{5}-\frac{5x}{3}) &= -1\\ -\sin\frac{16x}{15} &= -1\\ \sin\frac{16x}{15} &= 1\end{aligned}$$

$\dfrac{16x}{15}=\dfrac{(4k+1)\pi}{2}$，$x=\dfrac{15}{32}(4k+1)\pi$，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

6. (g) $\sin x\cos x(\sin^2 x-\cos^2 x) = \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}\sin 4x = \frac{1}{4}$

$\sin 4x = -1$

$4x=\frac{4k-1}{2}\pi$，$x=\frac{4k-1}{8}\pi$，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

(h) $\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}$

$\cos 2x+\cos 4x = \cos 6x+\cos 8x$

$2\cos 3x\cos x = 2\cos 7x\cos x$

$\cos x(\cos 7x-\cos 3x) = 0$

$2\cos x\sin 2x\sin 5x = 0$

$\cos x\sin 2x\sin 5x = 0$

即 $\cos x=0$ 或 $\sin 2x=0$ 或 $\sin 5x=0$

由 $\cos x=0$，得 $x=\frac{2k+1}{2}\pi$；

由 $\sin 2x=0$，得 $2x=k\pi, x=\frac{k\pi}{2}$；

由 $\sin 2x=0$，得 $5x=k\pi, x=\frac{k\pi}{5}$。

總結得 $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ 或 $x=\frac{k\pi}{5}$。

7. 設 $t=\tan\frac{x}{2}$，則

原式化為 $\frac{3(2t)}{1+t^2}+\frac{4(1-t^2)}{1+t^2} = 5$

$6t+4-4t^2 = 5+5t^2$

$9t^2-6t+1 = 0$

$(3t-1)^2 = 0$

$t=\frac{1}{3}$（重根）

而 $\tan x = \frac{2(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}$。