「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

數列 － 比與比例

摘要

1.　K 方法：

(a)　$x:y:z=a:b:c$，即令 $x=ak, y=bk, z=ck$。

(b)　$ax=by=cz$，即令上式 $=pk$，其中 $p=lcm(a,b,c)$，

因而得 $x=\dfrac{pk}{a}, y=\dfrac{pk}{b}, z=\dfrac{pk}{c}$。

2.　比例的基本性質：

(a)　合比定理

若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，則 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$。

(b)　分比定理

若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，則 $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$。

(c)　合分比定理

若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，則 $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$。

(d)　連等比定理

若 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=....=k$，則 $\dfrac{pa+qb+rc+...}{px+qy+rz+...}=k$。

3.　運用比例的基本性質解或化簡分式問題。

拾例

1. 已知 $(3A+2B):(7A+5B)=13:31$，求 $(13A+12B):(17A+15B)$ 的值。
(五羊杯 2003)

答：
$$\frac{3A+2B}{7A+5B} = \frac{13}{31}$$
$$31(3A+2B) = 13(7A+5B)$$
$$93A+62B = 91A+65B$$
$$2A = 3B$$
$$\frac{A}{B} = \frac{3}{2}$$

所以 $A:B=3:2$，令 $A=3k, B=2k$。

所求的比 $= \dfrac{13A+12B}{17A+15B} = \dfrac{13(3k)+12(2k)}{17(3k)+15(2k)}$

$= \dfrac{63k}{81k} = \dfrac{7}{9}$。

2. 若 $yz:zx:xy=2:3:4$，求 $\dfrac{x}{yz}:\dfrac{y}{zx}$。

答： 原式 $= \dfrac{x}{yz}\times\dfrac{zx}{y} = \dfrac{x^2}{y^2}$

$$\frac{yz}{zx} = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}$$

所以原式 $= (\dfrac{x}{y})^2 = (\dfrac{3}{2})^2 = \dfrac{9}{4}$

即所求比例為 9:4。

3. 若正數 a,b,c 都增至 4 倍，則 $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ 的值增至多少倍？

答： 設 $A=4a, B=4b, C=4c$。

則 $\dfrac{A^3+B^3+C^3}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}} = \dfrac{(4a)^3+(4b)^3+(4c)^3}{\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}+\frac{1}{4c}}$

$= \dfrac{64(a^3+b^3+c^3)}{\frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}$

故增至 $64\div\frac{1}{4}$ = 256 倍。

4. 已知 $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{z+x}{3}=\dfrac{y+z}{4}$ 且 $x+y+z=18$。求 b 之值，若 $b=x+y$。
(HKMO 1994/95 決賽個人)

答： 令 $\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{z+x}{3}=\dfrac{y+z}{4}=k$，便有 $\begin{cases} x+y=2k \\ z+x=3k \\ y+z=4k \end{cases}$，

三式相加，得 $x+y+z=\dfrac{9k}{2}$，即 $\dfrac{9k}{2}=18$，$k=4$。

b = $x+y$ = $2(4)$ = 8

5. 若 x,y,z 為實數，$xyz\neq 0$，$2xy=3yz=5zx$，及 $c=\dfrac{x+3y-3z}{x+3y-6z}$。求 c 的值。(HKMO 2010/11 決賽團體)

答： 令 $2xy=3yz=5zx=xyzk$，則 $z=2k, x=3k, y=5k$。

c = $\dfrac{x+3y-3z}{x+3y-6z}$ = $\dfrac{3k+3(5k)-3(2k)}{3k+3(5k)-6(2k)}$

= $\dfrac{12k}{6k}$ = 2

6. 若 $x+2y+7z=3x+4y+11z=0$，求 $\dfrac{3x^2+4y^2-2z^2}{5x^2+3y^2+5z^2}$ 的值。

答： 從兩式，消去 x ，得 $2y+10z=0$，即 $y=-5z$。

故 $x+2(-5z)+7z = x-3z = 0$

即 x = 3z。

故 $\dfrac{3x^2+4y^2-2z^2}{5x^2+3y^2+5z^2} = \dfrac{3(3z)^2+4(-5z)^2-2z^2}{5(3z)^2+3(-5z)^2+5z^2}$

$= \dfrac{27z^2+100z^2-2z^2}{45z^2+75z^2+5z^2} = \dfrac{125z^2}{125z^2} = 1$。

7. 若 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{x+y}{a}=\dfrac{2x-y}{b}$，求 ab 的值。

答： 根據等比性質 $a=3+4=7$， $b=2(3)-4=2$。

所以 $ab=2\times 7=14$。

8. 若 $x\neq 0$ 且滿足 $\dfrac{x^2+9x+7}{x^2-9x+7}=\dfrac{7x^2+9x+1}{7x^2-9x+1}$，求 x 的值。

答： $\dfrac{(x^2+9x+7)+(x^2-9x+7)}{(x^2+9x+7)-(x^2-9x+7)} = \dfrac{(7x^2+9x+1)+(7x^2-9x+1)}{(7x^2+9x+1)-(7x^2-9x+1)}$

$\dfrac{x^2+7}{9x} = \dfrac{7x^2+1}{9x}$

$x^2+7 = 7x^2+1$

$x^2 = 1$

x = 1（捨去） 或 −1。

9. 兄、弟二人合資 100000 元買國債，已知兄所出的錢為弟的三倍，求兄出錢多少？

答： 兄出錢 $100000\times\dfrac{3}{3+1} = 100000\times\dfrac{3}{4} = 75000$ 元。

10. 甲、乙、丙三人參加 1000 米賽跑，三人均以均速向前跑。已知甲到終點時，乙離終點還差 200 米；而乙到終點時，丙離終點還差 300 米。那麼，甲到終點時，丙離終點還差多少米？

答： 甲的速度:乙的速度 = 1000:800

乙的速度:丙的速度 = 1000:700

所以甲的速度:丙的速度 = $\dfrac{1000\times 1000}{800\times 700} = \dfrac{1000}{560}$

即甲到終點時，丙只跑了 560 米，離終點還差 440 米。

淺問

1. 若 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{5}$，求 $\dfrac{2a-b}{a+2b}$ 的值。

2. 若 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}$，求 $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ 的值。

3. 若 $a:b:c=3:5:7$，求 $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ 的值。

4. 若 $a:b:c=3:4:5$ 及 $a+b+c=48$，求 $a-b-c$ 的值。
(HKMO 1998/99 初賽團體)

5. 若 $yz:zx:xy=1:2:3$，求 $\dfrac{x}{yz}:\dfrac{y}{zx}$ 的值。(HKMO 1996/97 初賽個人)

6. 若 $2x=3y=5z$，求 $\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+3y^2+5z^2}$ 的值。

7. 若 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}=\dfrac{x+2y+3z}{k}$，求 k 的值。

8. 已知 $x=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$，求 x 的值。

9. 若 $a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)+c(x+3)(x+1)=0$ 的兩根為 0 與 1，求 $a:b:c$。

10. 某兩數的比例為 5 : 8。當每邊加 12 時，兩數的比例變為 3 : 4 。若b 為原本兩數之差及 b > 0，求b 的值。(HKMO 1992/93 決賽個人)

11. 解 $\dfrac{2x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2-x-1}=\dfrac{3x^3-x^2+5x-13}{3x^3-x^2-5x+13}$。

12. 在一場 2000 米競賽中，A 完成全程時，分別領先 B 、C 200 米及 290 米。若 B 及 C 各自以原有平均速度繼續競賽，則 B 在抵達終點時，領先 C x 米，求 x。(HKMO 1993/94 初賽團體)

詳答

1. 令 $a=3k, b=5k$ ，代入後得

$$\frac{2a-b}{a+2b} = \frac{2(3k)-(5k)}{(3k)+2(5k)} = \frac{k}{13k} = \frac{1}{13}$$

2. 令 $x=3k, y=4k$ ，代入後得

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+y}+\frac{x^2}{x^2+y^2} &= \frac{3k}{3k+4k}+\frac{(3k)^2}{(3k)^2+(4k)^2} \\ &= \frac{3}{3+4}+\frac{9}{9+16} = \frac{3}{7}+\frac{9}{25} \\ &= \frac{102}{175}\end{aligned}$$

3. 令 $a=3k, b=5k, c=7k$ ，代入後得

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} &= \frac{(3k)^2+(5k)^2+(7k)^2}{(3k)(5k)+(5k)(7k)+(7k)(3k)} \\ &= \frac{9+25+49}{15+35+21} = \frac{83}{71}\end{aligned}$$

4. 令 $a=3k, b=4k, c=5k$ ，代入後得

$$\begin{aligned}3k+4k+5k &= 48 \\ 12k &= 48 \\ \text{k} &= 4\end{aligned}$$

故 $a-b-c = 3k-4k-5k = -6k = -24$

5. 令 $yz=k, zx=2k, xy=3k$ ，

所以 $\frac{x}{yz}:\frac{y}{zx} = \frac{xyz}{(yz)^2}:\frac{xyz}{(zx)^2} = \frac{1}{(yz)^2}:\frac{1}{(zx)^2} = \frac{1}{k^2}:\frac{1}{4k^2}$

$= 4:1$

6. 令 $2x=3y=5z=30k$ ，故得 $x=15k, y=10k, z=6k$ 代入原式：

$$\begin{aligned}\frac{xy+yz+zx}{x^2+3y^2+5z^2} &= \frac{(15k)(10k)+(10k)(6k)+(6k)(15k)}{(15k)^2+3(10k)^2+5(6k)^2} \\ &= \frac{300k^2}{705k^2} = \frac{20}{47}\end{aligned}$$

7. 根據等比性質， $k=(2)+2(3)+3(4)=20$ 。

8. $x=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$

若 $a+b+c\neq 0$ ， $x=\dfrac{a+b+c}{b+c+c+a+a+b}=\dfrac{1}{2}$ 。

若 $a+b+c=0$ ，即 $a+b=-c$ ，所以 $x=\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{c}{-c}=-1$ 。

9. 把 0 與 1 代入 $a(x+1)(x+2)+b(x+2)(x+3)+c(x+3)(x+1)=0$ ，得

$\begin{cases}2a+6b+3c=0\\3a+6b+4c=0\end{cases}$ ，兩式相減得 $a+c=0$ ， $a=-c$ 。

把 $a=-c$ 代入，後得 $a=6b$ ，即 $a:b=6:1$ 。

所以 $a:b:c=6:1:-6$ 。

10. 設原兩分別數為 $5k,8k$ ，

$$\frac{5k+12}{8k+12}=\frac{3}{4}$$
$$20k+48=24k+36$$
$$k=3$$

所以 $b=8k-5k=3k=9$ 。

11.
$$\frac{2x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2-x-1}=\frac{3x^3-x^2+5x-13}{3x^3-x^2-5x+13}$$
$$\frac{(2x^3-3x^2)+(x+1)}{(2x^3-3x^2)-(x+1)}=\frac{(3x^3-x^2)+(5x-13)}{(3x^3-x^2)-(5x-13)}$$
$$\frac{2x^3-3x^2}{x+1}=\frac{3x^3-x^2}{5x-13}$$
$$x^2(2x-3)(5x-13)=x^2(3x-1)(x+1)$$
$$x^2[(2x-3)(5x-13)-(3x-1)(x+1)]=0$$
$$x^2[10x^2-41x+39-3x^2-2x+1]=0$$
$$x^2(7x^2-43x+40)=0$$
$$x^2(x-5)(7x-8)=0$$

故 $x=0,5,\dfrac{8}{7}$ 。

12. 當 B 走了 1800 米時，C 走了 1710 米。

B 多走 $\frac{1}{9}$，C 亦走了 $1710\times\frac{1}{9}=190$ 米。

故 $x=2000-1710-190=100$。

拿你所需的，幹你所必須幹的，

你便會得到你所想要的。

Take what you need; act as you must, and you will obtain that for which you wish!

法國數學家、哲學家

笛卡兒

(Rene Descartes 1596-1650)