「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

數列 － 某些數列的和與積

摘要

1. 掌握常用數列的通項公式：
   (a) $1,2,3,4,5,...$ $\quad a_n = n$
   (b) $1,3,5,7,9,...$ $\quad a_n = 2n-1$
   (c) $2,4,6,8,10,...$ $\quad a_n = 2n$
   (d) $1,-1,1,-1,1,...$ $\quad a_n = (-1)^{n-1}$
   (e) $1,4,9,16,25,...$ $\quad a_n = n^2$
   (f) $2,6,12,20,30,...$ $\quad a_n = n(n+1)$
   (g) $1,11,111,1111,11111,...$ $\quad a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$
2. Σ, Π 的定義和使用。
3. 數列總和 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ 的性質：
   $S_1 = a_1$ 及 $a_n = S_n - S_{n-1}$（其中 $n \geq 2$）
4. 常用數列的總和：
   (a) $1+2+3+...+n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$
   (b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
   (c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = [\dfrac{1}{2}n(n+1)]^2 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$
5. 介紹常用的數列求和方法，如倍差法等。

拾例

1. 數列 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, … 的第 1000 項是多少？

答： 設數列的第 1000 項為 n ，則

$$\frac{n(n+1)}{2} \le 1000$$

$$n^2+n-2000 \le 0$$

得 $$n \le \frac{-1+\sqrt{8001}}{2}$$

由於 $89<\sqrt{8001}<90$，所以 $n = \dfrac{-1+89}{2} = 44$。

2. 求下列各式的值：

(a) $\displaystyle\sum_{i=4}^{6}(i^2+1)$

(b) $\displaystyle\prod_{i=4}^{6}(i^2-1)$

答： (a) $\displaystyle\sum_{i=4}^{6}(i^2+1) = (4^2+1)+(5^2+1)+(6^2+1)$

$= 17+26+37 = 80$。

(b) $\displaystyle\prod_{i=4}^{6}(i^2-1) = (4^2-1)(5^2-1)(6^2-1)$

$= 15\times24\times35 = 12600$。

3. 已知 $1+2+3+\ldots+1998+1999+1998+\ldots+3+2+1$ 的個位數為 P ，求 P 的值。（HKMO 1999/2000 決賽個人）

答： 原和式 $= 2\times(\frac{1}{2}\times1999\times2000)-1999$

$= 1999\times(2000-1) = 3996001$

故 $P=1$。

4. *若 $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\ldots+10\times11\times12=a$，求 a 的值。（HKMO 1997/98 決賽團體）

答： $a = \frac{1}{4}(10)(11)(12)(13) = 4290$

5.　求下列數列的和：

(a)　$1^2+2^2+3^2+...+40^2$

(b)　$2^2+4^2+6^2+...+40^2$

(c)　$1^2+3^2+5^2+...+39^2$

答：(a)　原式 $= \dfrac{40(40+1)(80+1)}{6} = 22140$。

(b)　原式 $= 4(1^2+2^2+3^2+...+20^2)$

$= 4\times[\dfrac{20(20+1)(40+1)}{6}] = 11480$。

(c)　原式 $= 22140-11480 = 10660$。

6.　求 $1\times2\times4+2\times3\times5+3\times4\times6+...+n(n+1)(n+3)$。

答：原式

$$= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+3) = \sum_{k=1}^{n} k^3+4k^2+3k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^3+4\sum_{k=1}^{n} k^2+3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}+\frac{4n^3}{3}+2n^2+\frac{2n}{3}+\frac{3n^2}{2}+\frac{3n}{2}$$

$$= \frac{1}{12}(3n^4+22n^3+45n^2+26n)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+13)}{12}$$ 。

(註：由於分解需時，建議有空才幹。)

7.　將自然數的平方所組的數列，按照「第 n 群有 $2n-1$ 個元素」的規則分群：

$(1^2),(2^2,3^2,4^2),(5^2,6^2,7^2,8^2,9^2),...$

求 43^2 所在的一群中所有元素總和。

答：留意，每群最後一個元素均為完全平方數的平方，

由於 $36<43<49$，故 43^2 所在的一群是由 37^2 至 49^2。

即總和為 $\dfrac{1}{6}(49)(49+1)(98+1)-\dfrac{1}{6}(37)(37+1)(74+1)$

$= \dfrac{1}{6}(49)(50)(99)-\dfrac{1}{6}(37)(38)(75)$

$= 40425-17575 = 22850$。

8. 求形式為 6, 66, 666, ... 的前 n 項總和。

答： 總和 $= 6+66+666+\ldots = 6(1+11+111+\ldots)$

$$= 6\left(\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}\right)$$

$$= \frac{2}{3}(10+10^2+10^3+\ldots+10^n)-\frac{2n}{3}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{10^n-1}{10-1}\right)(10)-\frac{2n}{3}$$

$$= \frac{20}{27}(10^n-1)-\frac{2n}{3}$$

9. 已知 n 為大於 10000 的整數，且可以表示成三個連續正整數的乘積。求 n 的最小值。

答： 設三個連續正整數為 $(x-1), x, (x+1)$，

故得 $(x-1)x(x+1) > 10000$

$x^3 - x > 10000$

由於 $\left\lfloor \sqrt[3]{10000} \right\rfloor = 21$，故試取 $x = 21$， $21\times 22\times 23 = 10626 > 10000$。

故 $n = 10626$。

10. 若將 64 表示成十個不同的正整數的和式，問有多少種不同的分拆方法，並求此十個數中最大的一個的最小值。

答： 由於 $1+2+3+\ldots+10 = \frac{10\times 11}{2} = 55$。

64 的和式和上式相差 9，故把 9 分別加在數式最後的若干項中，

其中 9 = 9 = 1+8 = 2+7
= 3+6 = 4+5 = 1+1+7
= 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4
= 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3
= 1+1+1+6 = 1+1+2+5
= 1+1+3+4 = 1+2+2+4
= 1+2+3+3 = 1+1+1+1+5
= 1+1+1+2+4 = 1+1+1+3+3
= 1+1+2+2+3 = 1+2+2+2+2
= 1+1+1+1+1+4 = 1+1+1+1+2+3
= 1+1+1+2+2+2 = 1+1+1+1+1+1+3
= 1+1+1+1+1+2+2 = 1+1+1+1+1+1+1+2
= 1+1+1+1+1+1+1+1+1

故共有 20 種分拆方法。其中最大的一個數的最小值為 $10+1 = 11$。

淺問

1. 求下列各數式的值：

(a) $\sum_{i=1}^{10} i$　(b) $\sum_{i=1}^{10} i(i+1)$　(c) $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} ij$

(d) $\prod_{i=1}^{10} i$　(e) $\prod_{i=5}^{10} \frac{i}{i+1}$　(f) $\prod_{i=1}^{10}\prod_{j=1}^{10} \frac{i^2}{j}$

2. 寫出下列數列的通項公式：

(a) 3, 5, 7, 9, 11, ⋯　(b) 3, 8, 13, 18, 23, ⋯

(c) 11, 102, 1003, 1004, 10005, ⋯　(d) 1, 2, 4, 8, 16, ⋯

3. 已知數列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，及$\prod_{i=1}^{n} a_i = n^2$，求$a_1 + a_3 + a_5$ 的值。

4. 已知數列$\{a_n\}$中，$a_1 = 1$，及$\sum_{I=1}^{n} a_i = n^2$，求$a_1 + a_3 + a_5$ 的值。

5. 求 $100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + 96^2 - 95^2 + ... + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$ 。

6. 現有 50 個互不相等的正整數，它們之和是 2010。若當中最小的一個是 n，求 n 的最大可能值。（培正 2010 初賽中三）

7. 求下列數列的和：

(a) $1+2+3+...+100$　(b) $1^2+2^2+3^2+...+100^2$

(c) $1^3+2^3+3^3+...+100^3$　(d) $2+4+6+...+100$

(e) $2^2+4^2+6^2+...+100^2$　(f) $1+3+5+...+99$

(g) $1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+...+100^2$

(h) $1\times2+2\times3+3\times4+...+99\times100$

(i) $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+...+99\times100\times101$

8. 已知數列的前 n 項和為 S_n，求下列數列的通項 a_n：

(a) $S_n = n^3$　(b) $S_n = 4n^2 - n + 2$

(c) $S_n = 3^n - 2$　(d) $S_n = \frac{1}{n}$

9. 若 $R = 1\times2 + 2\times2^2 + 3\times2^3 + ... + 10\times2^{10}$，求 R 的值。
(HKMO 2006/07 決賽團體)

詳答

1. (a) $\sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+\ldots+10 = \frac{10\times(10+1)}{2} = 55$

(b) $\sum_{i=5}^{10} i(i+1) = 5\times6+6\times7+7\times8+\ldots+10\times11$

$= 30+42+56+\ldots+110$

$= 400$

(c) $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} ij = \sum_{i=1}^{10} i(1+2+3+\ldots+10)$

$= 55\sum_{i=1}^{10} i = 55^2 = 3025$

(d) $\prod_{i=1}^{10} i = 1\times2\times3\times\ldots\times10 = 10! = 3628800$

(e) $\prod_{i=5}^{10}\frac{i}{i+1} = \frac{5}{6}\times\frac{6}{7}\times\frac{7}{8}\times\ldots\times\frac{10}{11} = \frac{5}{11}$

(f) $\prod_{i=1}^{10}\prod_{j=1}^{10}\frac{i^2}{j} = \prod_{i=1}^{10}\left(\frac{i^2}{1}\times\frac{i^2}{2}\times\frac{i^2}{3}\times\ldots\times\frac{i^2}{10}\right) = \prod_{i=1}^{10}\frac{i^{20}}{10!}$

$= \frac{1^{20}}{10!}\times\frac{2^{20}}{10!}\times\frac{3^{20}}{10!}\times\ldots\times\frac{10^{20}}{10!} = \frac{(10!)^{20}}{(10!)^{10}}$

$= (10!)^{10}$

2. (a) $a_n = 2n+1$ (b) $a_n = 5n-2$

(c) $a_n = 10^n + n$ (d) $a_n = 2^{n-1}$

3. $a_1\times a_2 = 4$，$a_2 = 4$；$a_1\times a_2\times a_3 = 9$，$a_3 = \frac{4}{9}$；$a_n = \frac{(n-1)^2}{n^2}$。

所以 $a_5 = \frac{16}{25}$。即 $a_1 + a_3 + a_5 = 1+\frac{4}{9}+\frac{16}{25} = \frac{469}{225}$。

4. $a_1+a_2=4$，$a_2=3$；$a_1+a_2+a_3=9$，$a_3=5$；$a_n=n^2-(n-1)^2$。
所以 $a_5=25-16=9$。即 $a_1+a_3+a_5 = 1+5+9 = 15$。

5. 原式 $= (100-99)(100+99)+(98-97)(98+97)+\ldots+(2-1)(2+1)$
$= 100+99+98+..+1 = \dfrac{100\times(100+1)}{2}$
$= 5050$

6. 令 $n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+49) \le 2010$
$\dfrac{(n+n+49)\times 50}{2} \le 2010$
$25(2n+49) \le 2010$
$n \le 15$
若 $n=15$，
$15+16+17+\ldots+64 = 1975$
即 $15+16+17+\ldots+(2010-1975+64) = 2010$
$15+16+17+\ldots+99 = 2010$
故 n 的最大可能值為 15。

7. (a) $1+2+3+\ldots+100 = \dfrac{100(100+1)}{2} = 5050$

(b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+100^2 = \dfrac{100(100+1)(2\times100+1)}{6}$
$= 338350$

(c) $1^3+2^3+3^3+\ldots+100^3 = [\dfrac{100(100+1)}{2}]^2 = 5050^2$
$= 25502500$

(d) $2+4+6+\ldots+100 = 2(1+2+3+\ldots+50)$
$= 2\times\dfrac{50(50+1)}{2} = 2550$

(e) $2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2 = 4(1^2+2^2+3^2+\ldots+50^2)$
$= 4\times\dfrac{50(50+1)(2\times50+1)}{6}$
$= 171700$

7. (f) $1+3+5+\ldots+99$

$= (1+2+3+\ldots+100)-2(1+2+3+\ldots+50)$

$= \dfrac{100(100+1)}{2}-2\times\dfrac{50(50+1)}{2}$

$= 5050 - 2550$

$= 2500$

(g) $1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+\ldots+100^2$

$= 1^2+(2+3)(2-3)+(4+5)(4-5)+\ldots+(98+99)(98-99)+100^2$

$= 10001-(2+3+4+\ldots+99)$

$= 10002-(1+2+3+\ldots+99)$

$= 10002-\dfrac{99(99+1)}{2}$

$= 10002 - 4950$

$= 5052$

(h) $1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+99\times100$

$= 1\times(1+1)+2\times(2+1)+3\times(3+1)+\ldots+99\times(99+1)$

$= (1+2+3+\ldots+99)+(1^2+2^2+3^2+\ldots+99^2)$

$= \dfrac{99(99+1)}{2}+\dfrac{99(99+1)(2\times99+1)}{6}$

$= 4950 + 328350$

$= 333300$

(i) $1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\ldots+99\times100\times101$

$= 0\times1\times2+1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5+\ldots+99\times100\times101$

$= (1-1)\times1\times(1+1)+(2-1)\times2\times(2+1)+(3-1)\times3\times(3+1)$
$+\ldots+(100-1)\times100\times(100+1)$

$= 1\times(1^2-1)+2\times(2^2-1)+3\times(3^2-1)+\ldots+100\times(100^2-1)$

$= (1^3+2^3+3^3+\ldots+100^3)-(1+2+3+\ldots+100)$

$= [\dfrac{100(100+1)}{2}]^2-\dfrac{100(100+1)}{2}$

$= 25502500 - 5050$

$= 25497450$

8. (a) $S_n = n^3$

$a_n = S_n - S_{n-1} = n^3 - (n-1)^3$

$= n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 = 3n^2 - 3n + 1$

$a_1 = 1^3 = 1$

由於 a_1 亦符合 a_n 的公式，故其通式 $a_n = 3n^2 - 3n + 1$。

(b) $S_n = 4n^2 - n + 2$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= 4n^2 - n + 2 - 4(n-1)^2 + (n-1) - 2$

$= 4n^2 - n + 2 - 4n^2 + 8n - 4 + n - 1 - 2$

$= 8n - 5$

$a_1 = 4(1)^2 - (1) + 2 = 5$

由於 a_1 不符合 a_n 的公式，故其通式 $a_n = \begin{cases} 5 & n = 1 \\ 8n - 5 & n \geq 2 \end{cases}$。

(c) $S_n = 3^n - 2$

$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^n - 2 - 3^{n-1} + 2$

$= 3 \times 3^{n-1} - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

$a_1 = 3^1 - 2 = 1$

由於 a_1 不符合 a_n 的公式，故其通式 $a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2 \times 3^{n-1} & n \geq 2 \end{cases}$。

(d) $S_n = \dfrac{1}{n}$

$a_n = S_n - S_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}$

$= \dfrac{n-1-n}{n(n-1)} = \dfrac{-1}{n(n-1)}$

$a_1 = \dfrac{1}{1} = 1$

由於 a_1 不符合 a_n 的公式，故其通式 $a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \dfrac{-1}{n(n-1)} & n \geq 2 \end{cases}$。

9. 解法一：

$$
\begin{aligned}
R &= (2+2^2+2^3+\ldots+2^{10})+(2^2+2^3+2^4+\ldots+2^{10}) \\
&\quad +\ldots+2^{10} \\
&= 2(1+2+2^2+\ldots+2^9)+2^2(1+2+2^2+\ldots+2^8) \\
&\quad +\ldots+2^{10}\times(1) \\
&= 2(2^{10}-1)+2^2(2^9-1)+\ldots+2^{10}(2-1) \\
&= 2^{11}-2+2^{11}-2^2+\ldots+2^{11}-2^{10} \\
&= 2^{11}\times 10-2(1+2+2^2+\ldots+2^9) \\
&= 2^{11}\times 10-2(2^{10}-1) \quad = \quad 2^{11}\times 9+2 \\
&= 10434
\end{aligned}
$$

解法二：

$$
\begin{aligned}
2R &= 1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\ldots+10\times 2^{11} \\
R-2R &= 2+2^2+2^3+\ldots+2^{10}-10\times 2^{11} \\
-R &= 2(1+2+2^2+\ldots+2^9)-10\times 2^{11} \\
&= 2(2^{10}-1)-10\times 2^{11} \\
R &= 10\times 2^{11}-2^{11}+2 \quad = \quad 10434
\end{aligned}
$$

數理科學展現了序列、對稱和極限，

而這些正是美麗的最高形式。

古希臘數學家、科學家、哲學家

亞里士多德

(Aristotle 384bc-332bc)