「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

數列 － 等差數列與調和數列

摘要

1. 等差數列：
   (a) 若公差為 d 的等差數列，其通項為 $a_n = a_1 + (n-1)d$，
   (b) a,c 的等差中項 $b = \dfrac{a+c}{2}$，
   (c) 總和 $S_n = \dfrac{n}{2}(a_n + a_1) = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$，
   (d) $S_{m+n} = S_m + S_n + mnd$，
   (e) 分段和亦成等差數列，其公差為 $k^2 d$，其中 k 為每段項數。
2. 調和數列：
   (a) 若 $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c},....$ 成等差數列，則 $a,b,c,...$ 成調和數列。
   (b) a,c 的調和中項 $b = \dfrac{2ac}{a+c}$。

3. 介紹高階等差數列、高階差數列的定義：

某一數列各相鄰項的差所成的數列，
便是該數列的一階差數列。
如果說某一數列的 p 階差數列為常數數列，
即該數列為 p 階等差數列。
（一階等差數列，即我們常說的等差數列。）

(a) p 階等差數列的通項為一於 n 的 p 次多項式。

(b) p 階等差數列的前 n 項和 S_n 為一於 n 的 p + 1 次多項式。

(c) 運用逐差法或待定系數法求通項。

逐差法： 設某數列的首項為 a_1，一階差數列首項為 b_1，二階差數列首項為 c_1，如此類推：

$$a_n = a_1 + \frac{n-1}{1!}b_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}c_1 + \dots$$

$$\sum a_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2!}b_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}c_1 + \dots$$

拾例

1. 已知某等差數列首項為 1234，公差為 -123。問

   (a) 該數列哪一項起始為負數？

   (b) 求 S_n 的最大值。

答：(a) 設

$$1234-123(n-1) > 0$$
$$1357-123n > 0$$
$$n < \frac{1357}{123}$$

即 $n \le 11$

故在第 12 項起，該數列始為負數。

(b) 即 S_{11} 為最大值，

$$S_{11} = \frac{11}{2}(2\times1234-123\times10) = 6809$$ 。

2. 已知四數成等差數列，且四數的總和為 64，四數的平方和為 1524，求此四數中最大的一數。

答：設四數為 $(a-3d),(a-d),(a+d),(a+3d)$

則
$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d) = 64$$
$$4a = 64$$
$$a = 16$$

另
$$(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2 = 1524$$
$$a^2-6ad+9d^2+a^2-2ad+d^2+a^2+2ad+d^2+a^2+6ad+9d^2 = 1524$$
$$4a^2+20d^2 = 1524$$
$$4(16)^2+20d^2 = 1524$$
$$20d^2 = 500$$
$$d^2 = 25$$
$$d = \pm5$$

無論如何，該四數為 1, 11, 21, 31，最大一數為 31。

3. 已知數列 $\{a_n\}$ 是等差數列，S_n 為前 n 項和，且 $a_3=19, a_{19}=3$，求 S_{22} 的值。

答：$S_{22}=\frac{21}{2}(a_1+a_{21})=\frac{21}{2}(a_3+a_{19})=\frac{21}{2}(19+3)=231$ 。

4. 等差數列 $\{a_n\}$ 的前 m 項和為 10，前 2m 項和為 100，求它的前 3m 項和。

答： $\{a_n\}$ 的前 m 項和為 10，接下來的 m 項和為 90 ，相差 80。

故接下來的 m 項和為 80 + 90 = 170。

前 3m 項和為 10 + 90 + 170 = 270。

5. 已知等差數列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 項和的比為 $(7n+1):(4n+7)$，求 $\frac{a_4}{b_4}$ 的值。

答： 設等差數列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的前 n 項和分別為 S_n, T_n。

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+1}{4n+7} = \frac{n(7n+1)}{n(4n+7)}$$

令 $S_n = (7n+1)nk, T_n = (4n+7)nk$ ，

$$\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} = (7n+1)nk - [7(n-1)+1](n-1)k \\
&= k[7n^2 + n - 7(n-1)^2 - (n-1)] \\
&= k[7n^2 + n - 7n^2 + 14n - 7 - n + 1] \\
&= k(14n-6) \\
b_n &= T_n - T_{n-1} = (4n+7)nk - [4(n-1)+7](n-1)k \\
&= k[4n^2 + 7n - 4(n-1)^2 - 7(n-1)] \\
&= k[4n^2 + 7n - 4n^2 + 8n - 4 - 7n + 7] \\
&= k(8n+3)
\end{aligned}$$

所以 $\frac{a_4}{b_4} = \frac{14(4)-6}{8(4)+3} = \frac{50}{35} = \frac{10}{7}$。

6. 試求調和數列 $\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{1}{3},\ldots$ 的第十項。

答： 考慮各項的倒數 $2,\frac{5}{2},3,\ldots$。

這是首項為 2，公差為 $\frac{1}{2}$ 的等差數列。

故第十項為 $2+(10-1)(\frac{1}{2}) = \frac{13}{2}$。

故調和數列的第十項為 $\frac{2}{13}$。

7. 試在 2 和 3 之間加入三數，使五數成調和數列，求此三數的總和。

答： 解法一：

設 $2,a,b,c,3$ 成調和數列。

即 $b = \dfrac{2(2)(3)}{(2)+(3)} = \dfrac{12}{5}$

$a = \dfrac{2(2)(\frac{12}{5})}{(2)+(\frac{12}{5})} = \dfrac{48/5}{22/5} = \dfrac{24}{11}$

$c = \dfrac{2(3)(\frac{12}{5})}{(3)+(\frac{12}{5})} = \dfrac{72/5}{27/5} = \dfrac{8}{3}$

所求總和 $= \dfrac{24}{11}+\dfrac{12}{5}+\dfrac{8}{3} = \dfrac{1196}{165}$。

解法二：

設 $2,a,b,c,3$ 成調和數列，

即 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c},\dfrac{1}{3}$ 成等差數列。

故 $\dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$

$\dfrac{1}{b} = \dfrac{5}{12}$，

$b = \dfrac{12}{5}$。

$\dfrac{2}{a} = \dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{12}$

$\dfrac{1}{a} = \dfrac{11}{24}$

$a = \dfrac{24}{11}$

$\dfrac{2}{c} = \dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{4}$

$\dfrac{1}{c} = \dfrac{3}{8}$

$c = \dfrac{8}{3}$

所求總和 $= \dfrac{24}{11}+\dfrac{12}{5}+\dfrac{8}{3} = \dfrac{1196}{165}$。

8. 定義數列 $a_n = n^2 + 2n + 3$，求該數列的高階公差。

答： 列寫數列： 6, 11, 18, 27, 38, ...

一階差數列： 5, 7, 9, 11, ...

二階差數列： 2, 2, 2, ...

故該數列為二階公差數列，二階公差為 2。

9. 求差分數列 6, 11, 20, 36, 52, … 的第 20 項。

答： 解法一：

第一階差為 5, 9, 16, 26, …

第二階差為 4, 7, 10, …

第三階差恆為 3，故此數列為三階等差數列。

第二階差數列的通項為 $4+3(n-1) = 3n+1$

第一階差數列的通項為

$$5+\sum_{k=1}^{n-1}(3n+1)$$

$$= 5+3\times\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)$$

$$= 5+\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+n-1$$

$$= \frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2}n+4$$ 。

原數列的通項為

$$6+\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k+4)$$

$$= 6+\frac{3}{2}\times\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$

$$-\frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}+4(n-1)$$

$$= 6+\frac{1}{2}n^3-\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{4}n-\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}n+4n-4$$

$$= \frac{1}{2}n^3-n^2+\frac{9}{2}n+2$$

故第 20 項為

$$= \frac{1}{2}(20)^3-(20)^2+\frac{9}{2}(20)+2$$

= 3692。

9.（續）

解法二：

第一階差為 5, 9, 16, 26, …

第二階差為 4, 7, 10, …

第三階差恆為 3，故此數列為三階等差數列。

原數列的通項為 $6+5(n-1)+\frac{4(n-1)(n-2)}{2}+\frac{3(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$

故第 20 項為 $6+5\times19+\frac{4\times19\times18}{2}+\frac{3\times19\times18\times17}{6}$

= 6 + 95 + 684 + 2907

= 3692

解法三：

設 $a_n=a+bn+cn^2+dn^3$，

得 $\begin{cases} a+b+c+d=6 \\ a+2b+4c+8d=11 \\ a+3b+9c+27d=20 \\ a+4b+16c+64d=36 \end{cases}$，$\begin{cases} b+3c+7d=5 \\ b+5c+19d=9 \\ b+7c+37d=16 \end{cases}$

$\begin{cases} 2c+12d=4 \\ 2c+18d=7 \end{cases}$， 解得 $c=-1, d=\frac{1}{2}$。

代入得 $b=\frac{9}{2}, a=2$。

所以 $a_n=2+\frac{9}{2}n-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n^3$

故第 20 項為 $=\frac{1}{2}(20)^3-(20)^2+\frac{9}{2}(20)+2$

= 3692。

10.　求差分數列 6, 11, 20, 36, 52, … 加至第 20 項的總和。

答：　解法一：

原數列的通項為 $= \frac{1}{2}n^3 - n^2 + \frac{9}{2}n + 2$

故所求總和
$$= \sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{2}n^3 - n^2 + \frac{9}{2}n + 2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20} n^3 - \sum_{n=1}^{20} n^2 + \frac{9}{2}\sum_{n=1}^{20} n + 2\sum_{n=1}^{20} 1$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{20\times 21}{2}\right)^2 - \frac{20\times 21\times 41}{6} + \frac{9}{2}\left(\frac{20\times 21}{2}\right)$$
$$+ 2(20)$$
$$= 22050 - 2870 + 945 + 40$$
$$= 20165$$

解法二：

第一階差為 5, 9, 16, 26, …

第二階差為 4, 7, 10, …

第三階差恒為 3，故此數列為三階等差數列

故所求總和
$$= 6(20) + \frac{5\times 20\times 19}{2} + \frac{4\times 20\times 19\times 18}{6}$$
$$\frac{3\times 20\times 19\times 18\times 17}{24}$$
$$= 120 + 950 + 4560 + 14535$$
$$= 20165$$ 。

10.（續）

解法二：

第一階差為 5, 9, 16, 26, …

第二階差為 4, 7, 10, …

第三階差恆為 3，故此數列為三階等差數列。

原數列的通項為 $6+5(n-1)+\frac{4(n-1)(n-2)}{2}+\frac{3(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$

故第 20 項為 $6+5\times19+\frac{4\times19\times18}{2}+\frac{3\times19\times18\times17}{6}$

= 6 + 95 + 684 + 2907

= 3692

解法三：

設 $a_n=a+bn+cn^2+dn^3$，

得 $\begin{cases} a+b+c+d=6 \\ a+2b+4c+8d=11 \\ a+3b+9c+27d=20 \\ a+4b+16c+64d=36 \end{cases}$，$\begin{cases} b+3c+7d=5 \\ b+5c+19d=9 \\ b+7c+37d=16 \end{cases}$

$\begin{cases} 2c+12d=4 \\ 2c+18d=7 \end{cases}$，解得 $c=-1,d=\frac{1}{2}$。

代入得 $b=\frac{9}{2},a=2$。

所以 $a_n=2+\frac{9}{2}n-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n^3$

故第 20 項為 $=\frac{1}{2}(20)^3-(20)^2+\frac{9}{2}(20)+2$

$=$ 3692。

淺問

1. 求下列等差數列的通式 a_n 和前十項和 S_{10}：

   (a) $a_1 = 10$, $d = 7$　　(b) $a_1 = -9$, $d = -\frac{1}{2}$

2. 若數列 $1, 6+2a, 10+5a, \ldots$ 是一等差數列，求 a。(HKMO 1996/97 決賽團體)

3. 一等差數列的前四項為 $a, x, b, 2x$，求 $a:b$。(AHSME 1987)

4. 已知等差數列 $\{a_n\}$ 中，$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$，求 S_{20} 的值。

5. 一個等差數列前 10 項之和以及前 100 項之和分別為 100 和 10。求該數列的前 110 項之和。(AHSME 1980)

6. 已知等差數列 $a_n = 1989 - 64n$，求該列的前 n 項總和 S_n 的最大值。

7. 設等差數列 $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{47}$ 中奇數項之和為 1272，求該數列所有 47 項的總和。(COMC 1998)

8. 試在 6 和 666 中加插項五項，使之成為等差數列。

9. 若調和數列的首二項為 3 和 2，求該調和數列的第十項。

10. 試在 10 和 15 中加插四項，使之成為調和數列。

11. 給定下列通項，寫出下列 p 階等差數列的階數及公差：

    (a) $\{n^2 + n + 1\}$　　(b) $\{n^3 - n^2 + n - 1\}$

12. 試以待定系數法求下列高階等差數列的通項和該數列的第十項：

    (a) 7, 11, 17, 25, …　(二階等差數列)
    (b) 21, 62, 133, 240, …　(三階等差數列)

13. 試以逐差法求下列高階等差數列的通項和該數列的第十項：

    (a) 2, 3, 7, 14, …　(二階等差數列)
    (b) 10, 12, 13, 17, …　(三階等差數列)

14. 已知數列的二階差數列恆為 1，且該數列的 $a_{20} = a_{12} = 2012$，求 a_{2012}。

詳答

1. (a) $a_1 = 10$， $d = 7$

$$a_n = 10 + 7(n-1) = 7n + 3$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2\times 10 + 7(10-1)] = 415$$

(b) $a_1 = -9$， $d = -\frac{1}{2}$

$$a_n = -9 - \frac{1}{2}(n-1) = -\frac{n}{2} - \frac{17}{2}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2\times(-9) - \frac{1}{2}(10-1)] = -\frac{225}{2}$$

2.

$$(6+2a) - 1 = (10+5a) - (6+2a)$$

$$5 + 2a = 4 + 3a$$

$$a = 1$$

3.

$$b = \frac{x+2x}{2} = \frac{3x}{2}$$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$a + \frac{3x}{2} = 2x$$

$$a = \frac{x}{2}$$

$$a:b = \frac{x}{2}:\frac{3x}{2} = 1:3$$

4. 設等差數列的通項 $a_n = a_1 + d(n-1)$，則

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = a_1 + 5d + a_1 + 8d + a_1 + 11d + a_1 + 14d$$

$$= 4a_1 + 38d = 20$$

$$2a_1 + 19d = 10$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = \frac{20}{2}\times 10$$

$$= 100$$

5. 設該數列的首項為 a ，公差為 d。

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a+9d) = 100$$

$$2a+9d = 20 \quad \ldots \quad (1)$$

$$S_{100} = \frac{100}{2}(2a+99d) = 10$$

$$2a+99d = \frac{1}{5} \quad \ldots \quad (2)$$

(2) – (1)：

$$90d = -\frac{99}{5}$$

$$d = -\frac{11}{50}$$

所以 $a = \frac{1099}{100}$

$$S_{110} = \frac{110}{2}(2a+109d) = 55(2\times\frac{1099}{100}-109\times\frac{11}{50})$$

$$= 55(\frac{1099-1199}{50}) = -110$$

6. 該數列的首項為 $1989-64(1)=1925$ 。

該數列的第 $\left[\frac{1989}{64}\right]=31$ 項為最小正項，其值為 $1989-64\times31=5$ 。

所以 S_n 的最大值為 $S_{31}=\frac{31}{2}(1925+5) = 29915$。

7. 設該數列公差為 d。

$$\frac{24}{2}(t_1+t_1+23\times2d) = 1272$$

$$24(t_1+23d) = 1272$$

$$t_1+23d = 53$$

所求總和 $= \frac{47}{2}(t_1+t_1+46d) = 47(t_1+23d)$

$= 47\times53 = 2491$。

8. 設等差數列的通項 $a_n=a_1+d(n-1)$，則

$a_1=6$ ，$a_6=6+6d=666$，所以 $d=110$，

故該數為 6, 116, 226, 336, 446, 556, 666。

9. 即有等差數列的首二項為 $\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ ，故公差為 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 。

而等差數列的第十項為 $\frac{1}{3}+9\times(\frac{1}{6}) = \frac{11}{6}$ 。

故調和數列的第十項為 $\frac{6}{11}$ 。

10. 先在 $\frac{1}{10}$ 和 $\frac{1}{15}$ 間加插五數，使之成為等差數列，

令 $\frac{1}{15}=\frac{1}{10}+5d$ ，即 $d=-\frac{1}{150}$

故加插五數分別為 $\frac{1}{10}-\frac{1}{150}=\frac{7}{75}$ 、 $\frac{7}{75}-\frac{1}{150}=\frac{13}{150}$ 、

$\frac{13}{150}-\frac{1}{150}=\frac{2}{25}$ 、 $\frac{2}{25}-\frac{1}{150}=\frac{11}{150}$

即 $\frac{1}{10},\frac{7}{75},\frac{13}{150},\frac{2}{75},\frac{11}{150},\frac{1}{15}$ 成等差數列。

故所求數列為 $10,\frac{75}{7},\frac{150}{13},\frac{75}{2},\frac{150}{11},15$ 。

11. (a) $\{n^2+n+1\}$ 為二階等差數列，

首四項為 3, 7, 13, 21, …

一階差數列為 4, 6, 8, …

故二階公差為 2。

(b) $\{n^3-n^2+n-1\}$ 為三階等差數列，

首五項為 0, 5, 20, 51, 104, …

一階差數列為 5, 15, 31, 53, …

二階差數列為 10, 16, 22, …

故三階公差為 6。

12.　(a)　設通項為 an^2+bn+c，代入三值得

$$\begin{cases} a+b+c=7 \\ 4a+2b+c=11 \\ 9a+3b+c=17 \end{cases}$$，解得 $a=1, b=1, c=5$，

故通項為 n^2+n+5。即 $a_{10}=(10)^2+(10)+5=115$。

(b)　設通項為 an^3+bn^2+cn+d，代入四值得

$$\begin{cases} a+b+c+d=21 \\ 8a+4b+2c+d=62 \\ 27a+9b+3c+d=133 \\ 64a+16b+4c+d=240 \end{cases}$$，解得 $a=1, b=9, c=7, d=4$，

故通項為 n^3+9n^2+7n+4。$a_{10}=(10)^3+9(10)^2+7(10)+4=1974$。

13.　(a)　2, 3, 7, 14, …

該數列的一階差數列為 1, 4，二階差數列為 3

即該數列的一階差數列通項為 $1+3(n-1)=3n-2$。

故該數列的通項為 = $2+1(n-1)+\dfrac{3(n-1)(n-2)}{2}$

第十項為 = $2+9+\dfrac{3\times9\times8}{2}$ = 119。

(b)　10, 12, 13, 17, …

該數列的一階差數列為 2, 1, 4，二階差數列為 -1, 3，

三階差數列為 4。

故該數列的通項為

$$10+2(n-1)-\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{4(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

第十項為 $10+2\times9-\dfrac{9\times8}{2}+\dfrac{4\times9\times8\times7}{6}$

= 328

14. 令該數列的一階差數列為 $\{b_n\}$，即其一階差數列通項為

$$b_n = b_1 + (n-1)$$

所以 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}[b_1 + (k-1)] = a_1 + b_1(n-1) + \frac{(n-1)(n)}{2} - (n-1)$

$$a_{12} = a_1 + b_1(12-1) + \frac{(12-1)(12)}{2} - (12-1)$$

$$= a_1 + 11b_1 + 55 = 2012 \quad \cdots \text{（1）}$$

$$a_{20} = a_1 + b_1(20-1) + \frac{(20-1)(20)}{2} - (20-1)$$

$$= a_1 + 19b_1 + 171 = 2012 \quad \cdots \text{（2）}$$

解（1）及（2），得 $a_1 = \frac{4233}{2}, b_1 = -\frac{29}{2}$

即 $a_n = \frac{4233}{2} - \frac{29}{2}(n-1) + \frac{(n-1)(n)}{2} - (n-1)$

$$= \frac{1}{2}n^2 - 16n + 2132$$

$a_{2012} = \frac{1}{2}(2012)^2 - 16(2012) + 2132 = 1994012$。

數學是一把斧頭，把我們的無知打碎。

Mathematics is the hammer that shatters the ice of our unconscious.

美國數學家、物理學家

皮寇弗

(Clifford A. Pickover 1957-)