「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

數列 － 等比數列

摘要

1. 若公比為 r 的等比數列，其通項為 $a_n = a_1 r^{n-1}$（其中 $r \neq 0$）。
2. a,c 的等比中項 $b = \pm\sqrt{ac}$。
3. 總和：
   (a) $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r-1} = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$（其中 $r \neq 1$）
   (b) $S_n = na_1$（其中 $r = 1$）。
   (c) $S_{m+n} = S_m + r^m S_n = S_n + r^n S_m$。
   (d) 分段和亦成等比數列，其公比為 r^k，其中 k 為每段項數。
4. 無限和 $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$（其中 $|r| < 1$）。
5. 運用等比數列計算循環小數與分數互化問題。
6. 解決包括等比數列、等差數列和調和數列的混合問題。

拾例

1. 對於正整數 $a,b,2009$ 使 $a<b<2009$ 且成為一公比為整數的等比數列， 求 a 的值。（AMC 10 2009）

答： 設等比數列公比為 r，

故 2009 = ar^2，

但另一方面 $2009=7^2\times 41$，故得 $a=41$。

2. 在等比數列 $\{a_n\}$ 中，$a_4a_{17}+a_8a_{13}=2\sqrt{2}$，求 $a_9a_{10}a_{11}a_{12}$ 的值。

答： 設等比數列的公比為 r，則

$a_1r^3\times a_1r^{16}+a_1r^7\times a_1r^{12} = 2\sqrt{2}$

$2a_1^2r^{19} = 2\sqrt{2}$

所以 $a_1^2r^{19} = \sqrt{2}$

$a_9a_{10}a_{11}a_{12} = a_1r^8\times a_1r^9\times a_1r^{10}\times a_1r^{11} = a_1^4r^{38} = 2$

3. 某數加上 1, 12, 123 成等比數列，求公比。

答： 設某數為 x，

$(x+1)(x+123) = (x+12)^2$

$x^2+124x+123 = x^2+24x+144$

$100x = 21$

$x = \frac{21}{100}$

公比 $= \frac{x+12}{x+1} = \frac{\frac{21}{100}+12}{\frac{21}{100}+1} = \frac{21+1200}{21+100}$

$= \frac{1221}{121}$。

4. 在 1 和 10 之間插入 10 個正數，使這裡十二個數成等比數列。求這十二個數的乘積。

答： 乘積 $= (1\times 10)^6 = 10000$。

5.　設三數組成等比數列，三數之和為 13 ，積為 27，求此三數中最小的一數。

答：　設三數為 a,b,c，其中 $a \ge b \ge c$。

若公比為 1，即三數均為 $\frac{13}{3}$，積不為 27。

若公比不為 1，依題意，有

$$\begin{cases} a+b+c=13 \\ abc=27 \\ b^2=ac \end{cases}$$

，由此得 $b^3=27$，即 $b=3$。

故得 $\begin{cases} a+c=10 \\ ac=9 \end{cases}$，即 $a=9, c=1$。

所以三數中最小的一個為 1。

6.　若奇數 a,b,c,d 符合下列性質：

(a)　$13<a<b<c<d<130$，

(b)　a,d 的最大公因子為 1，

(c)　a,b,c,d 組成等比數列，

求 c 的值。

答：　由條件 (b) 及 (c)，

可得 $a=x^3, b=x^2y, c=xy^2, d=y^3$，

其中 $(x,y)=1, y>x$。

再由條件 (a)，

得知 13 至 130 之間的完全奇立方數僅得 27, 125。

所以得 $x=3, y=5$，即 $c=3\times5^2=75$。

7.　等比數列的前 10 項和 $S_{10}=10$，前 20 項和 $S_{20}=100$，求前 30 項和 S_{30}。

答：　設原等比數列公比為 q。

令 $b_1=S_{10}=10, b_2=S_{20}-S_{10}=90, b_3=S_{30}-S_{20}$

則 b_1,b_2,b_3 亦成等比數列，公比為 $r=q^{10}=\frac{90}{10}=9$。

因此 $S_{30} = b_1+b_2+b_3 = b_1+b_1r+b_1r^2$

$= b_1(1+r+r^2) = 10(1+9+9^2) = 910$。

8. 求下列各式的值：

(a) $0.64+0.0064+0.000064+\ldots$

(b) $0.\dot{6}\dot{4}+0.00\dot{6}\dot{4}+0.0000\dot{6}\dot{4}+\ldots$

答： (a) 原式 $= 0.64(1+0.01+0.0001+\ldots)$

$= \frac{64}{100}(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots)$

$= \frac{64}{100}\times\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{64}{100}\times\frac{100}{99}$

$= \frac{64}{99}$ 。

(b) 原式 $= 0.\dot{6}\dot{4}(1+0.01+0.0001+\ldots)$

$= \frac{64}{99}(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\ldots)$

$= \frac{64}{99}\times\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{64}{99}\times\frac{100}{99}$

$= \frac{6400}{9801}$ 。

9. 某兩數的等差中項和等比中項分別為 13 和 12，求此兩數的調和中項。

答： 設該兩數為 a,b，

$a+b = 2\times13 = 26$，

$ab = 12^2 = 144$

調和中項 $= \frac{2ab}{a+b} = \frac{2\times144}{26} = \frac{144}{13}$ 。

10. 已知 $8,a,b$ 形成一等差級數，且 $a,b,36$ 形成一等比級數。若 a 和 b 皆為正整數，求 a ， b 的和。(HKMO 1997/98 初賽個人)

答： 依題意， $2a=8+b$，即 $b=2a-8$。

$b^2 = 36a$

$(2a-8)^2 = 36a$

$4a^2-32a+64 = 36a$

$a^2-17a+16 = 0$

$(a-1)(a-16) = 0$

$a=1$（捨去）或 $a=16$

由於 $b=2a-8$，即 $b=24$。故 $a+b=16+24=40$。

淺問

1. 求下列等比數列的通式 a_n 和前十項和 S_{10}：
   (a) $a_1=1$， $r=3$ (b) $a_1=5$， $r=-2$

2. 某等比數列的第五項和第八項分別為 7! 和 8!。求該數列的首項。(AMC 12 2009)

3. 求數列 1, $1+2$， $1+2+2^2$， …， $1+2+2^2+\ldots+2^{2010}$ 的和。

4. 設 $f(x)=ax+b$ （$a\neq 0$），若 $f(2)$ 、 $f(5)$ 、 $f(14)$ 成等比數列及 $f(8)=15$，求 $\sum_{i=1}^{20} f(i)$ 的值。

5. 有等差數列$\{a_n\}$的公差為 d 和等比數列$\{b_n\}$的公比為 r，其中 $a_1=1, b_1=2$。若數列 $\{a_n+b_n\}$ 的前三項為 3, 12, 23，求 $d+r$ 的值。

6. 試在 1 和 7776 中加插四項，使之成為等比數列。

7. 若整數 a,b,c,d,e 符合下列性質：
   (a) $2\leq a<b<c<d<e<100$，
   (b) a,e 的最大公因子為 1，
   (c) a,b,c,d,e 組成等比數列，
   求 c 的值。(COMC 2011)

8. 兩數的調和中項和等比中項分別為 4 和 8，求此兩數的等差中項。

9. 求下等比數列的無限和 S_∞：
   (a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots$ (b) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\ldots$

10. 求下列各式的值：
    (a) $0.89+0.0089+0.000089+\ldots$
    (b) $0.\dot{8}\dot{9}+0.00\dot{8}\dot{9}+0.0000\dot{8}\dot{9}+\ldots$

11. 若有四數成等差數列，順序分別加上 1, 1, 3, 9 後，便成為等比數列，求原來四數的乘積。

詳答

1. (a) $a_1 = 1$, $r = 3$

$a_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$

$S_{10} = \dfrac{3^{11}-1}{3-1} = \dfrac{3^{11}-1}{2}$ (88573)

(b) $a_1 = 5$, $r = -2$

$a_n = 5 \times (-2)^{n-1}$

$S_{10} = \dfrac{5[1-(-2)^{11}]}{1-(-2)} = \dfrac{5(1+2^{11})}{3}$

$= 3415$

2. 設該數列首項為 a，公比為 r，得 $ar^4 = 7!$ 及 $ar^7 = 8!$。

$\dfrac{ar^7}{ar^4} = \dfrac{8!}{7!}$

$r^3 = 8$

r = 2

所以首項 a $= \dfrac{7!}{2^4} = \dfrac{5040}{16} =$ 315。

3. 該數列即為 $2-1$, 2^2-1, 2^3-1, …, $2^{2010}-1$。

而總和 $= (2-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\ldots+(2^{2010}-1)$

$= (2+2^2+2^3+\ldots+2^{2010})-2010$

$= 2^{2011}-2-2010 = 2^{2011}-2012$

4. $[f(5)]^2 = f(2)\times f(14)$

$(5a+b)^2 = (2a+b)(14a+b)$

$25a^2+10ab+b^2 = 28a^2+16ab+b^2$

$3a^2+6ab = 0$

$3a(a+2b) = 0$

由於 $a\neq 0$，所以 $a=-2b$

所以 $f(x)=-2bx+b$， $f(8)=-16b+b=-15b=15$，即 $b=-1$, $a=2$。

即 $f(x)=2x-1$

$$\sum_{i=1}^{20} f(i) = [2(1)-1]+[2(2)-1]+[2(3)-1]+\ldots+[2(20)-1]$$

$$= 2\times\frac{20\times(20+1)}{2}-20 = 400$$

5. $a_1+b_1 = 1+2 = 3$

$a_2+b_2 = a_1+d+b_1r = 12$

$d+2r = 11 \quad \cdots(1)$

$a_3+b_3 = a_1+2d+b_1r^2 = 23$

$2d+2r^2 = 22$

$d+r^2 = 11 \quad \cdots(2)$

由（1）及（2），得

$11-2r+r^2 = 11$

$r^2-2r = 0$

$r=0$ 或 $r=2$，即得 $d=11$ 或 $r=7$，

所以 $d+r$ = 11 或 9。

6. 設等比數列的通項 $a_n=a_1r^{n-1}$，則

$a_1=1$，$a_6=1\times r^5=7776$，所以 $r=6$，

故該數為 1, 6, 36, 216, 1296, 7776。

7. 由條件（b）及（c），

可得 $a=x^4, b=x^3y, c=x^2y^2, d=xy^3, e=y^4$，

其中 $(x,y)=1, y>x$。

再由條件（a），

得知 100 以內的完全四次方數僅得 1, 16, 81。

所以得 $x=2, y=3$，即 $c=2^2\times 3^2=36$。

8. 設兩數分別為 a,b，

則 $ab = 8^2 = 64$

$\dfrac{2ab}{a+b} = 4$

$2\times 64 = 4(a+b)$

$a+b = \dfrac{128}{4} = 32$

故等差中項 $= \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{32}{2} = 16$。

9. (a) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots = \dfrac{1}{1-(\frac{1}{3})} = \dfrac{3}{2}$

(b) $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\ldots = \dfrac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \dfrac{3}{5}$

10. (a) 原式 $= 0.89(1+0.01+0.0001+\ldots)$

$= \dfrac{89}{100}(1+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{100^2}+\ldots)$

$= \dfrac{89}{100}\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{100}} = \dfrac{89}{100}\times\dfrac{100}{99}$

$= \dfrac{89}{99}$。

(b) 原式 $= 0.\dot{8}\dot{9}(1+0.01+0.0001+\ldots)$

$= \dfrac{89}{99}(1+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{100^2}+\ldots)$

$= \dfrac{89}{99}\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{100}} = \dfrac{89}{99}\times\dfrac{100}{99}$

$= \dfrac{8900}{9801}$。

11. 設原來四數為 $a,(a+d),(a+2d),(a+3d)$，

則 $(a+d+1)^2 = (a+1)(a+2d+3)$

即 $a^2+d^2+1+2a+2d+2ad = a^2+2ad+3a+a+2d+3$

$d^2-2a-2 = 0 \quad \cdots(1)$

另 $(a+2d+3)^2 = (a+d+1)(a+3d+9)$

$a^2+4d^2+9+4ad+6a+12d = a^2+3ad+9a+ad+3d^2$

$9d+a+3d+9$

$d^2-4a = 0 \quad \cdots(2)$

(1), (2) 兩式合得

$4a-2a-2 = 0$

$2a = 2$

$a = 1$

故 $d = \pm 2$。

若取 $a=1, d=2$，得數列 1, 3, 5, 7，乘積 $= 1\times3\times5\times7$

$= 105$

驗算加值後成 2, 4, 8, 16，合題意為一首項和公比均是 2 的等比數列。

若取 $a=1, d=-2$，得數列 1, −1, −3, −5，

乘積 $= 1\times(-1)\times(-3)\times(-5) = -15$

驗算加值後成 2, 0, 0, 4，不合題意，故應捨去。

即答案是 105。

聰明在於學習，天才在於積累。

中國數學家

華羅庚 (1910-1985)