「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

數列 – 周期與遞推

摘要

1. 循環連分數和循環根式的處理
2. 建立數列的遞推關係式：

   （a）$a_{n+1}=ka_n+l$，兩邊加上等量 p，使之成為等比數列，再求該等量。即 $a_{n+1}+p=ka_n+l+p=k(a_n+\frac{l+p}{k})$，再使 $p=\frac{l+p}{k}$，解出 $p=\frac{l}{k-1}$。

   （b）$a_{n+2}=ka_{n+1}+la_n$，兩邊加上等量 pa_{n+1}，

   $a_{n+2}+pa_{n+1}=(k+p)a_{n+1}+la_n=(k+p)(a_{n+1}+\frac{la_n}{k+p})$，

   由於 $k+p\neq 0$，所以令 $p=\frac{l}{k+p}$，再解出 p 值。

   （c）$a_{n+1}=\frac{a_n}{ka_n+l}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}=k+\frac{l}{a_n}$，如（a）求出 $\frac{1}{a_n}$ 的遞推關係式。
3. 運用不動點理論求多次疊代函數。
4. 認識一次函數經多次疊代而成的皮卡（Picard）序列：

   設 $f(x)=ax+b$， $f^{(n)}(x)=a^nx+\frac{a^n-1}{a-1}b$。
5. 周期函數的函數值。

拾例

1. 已知數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1=3$ 及 $a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$，求 $\prod_{k=1}^{1000} a_k$ 及 $\sum_{k=1}^{1000} a_k$ 的值。

答：
$$a_2 = 1-\frac{1}{a_1} = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$a_3 = 1-\frac{1}{a_2} = 1-\frac{1}{2/3} = -\frac{1}{2}$$
$$a_4 = 1-\frac{1}{a_3} = 1-\frac{1}{-1/2} = 3$$

即 $a_4=a_1$ 由此得 $\{a_n\}$ 為周期 3。

$$\prod_{k=1}^{1000} a_k = \left(\prod_{k=1}^{3} a_k\right)^{333}\times a_{1000} = [3\times\frac{2}{3}\times(-\frac{1}{2})]^{333}\times 3$$
$$= (-1)^{333}\times 3 = -3\text{。}$$
$$\sum_{k=1}^{1000} a_k = 333\left(\sum_{k=1}^{3} a_k\right)+a_{1000} = 333(3+\frac{2}{3}-\frac{1}{2})+3$$
$$= 333(\frac{19}{6})+3 = \frac{2111}{2}\text{。}$$

2. 已知八項數列 A, B, C, D, E, F, G, H 中 $C=5$ 及任意相鄰三項和為 30，求 $A+H$ 的值。（AMC 12 2011）

答：由於 $A+B+C=30$ 及 $B+C+D=30$，故得 $A=D$。
同理，有 $A=D=G, B=E=H, C=F$。
所以 $A+H = A+B = 30-C = 30-5 = 25$。

3. 已知 $f(n)=3+f(n-1)$ 及 $f(1)=100$，求 $f(100)$ 的值。

答：
$f(n)-f(n-1) = 3$，
$f(2)-f(1) = 3$
$f(3)-f(2) = 3$
. . .
以上數式的總和：
$f(100)-f(99) = 3$
所以 $f(100)-f(1) = 99\times 3$
$f(100) = 297+100 = 397$。

4. 已知 $f(n)=3f(n-1)$ 及 $f(1)=100$，求 $f(100)$ 的值。

答： $\dfrac{f(n)}{f(n-1)} = 3$

$\dfrac{f(2)}{f(1)} = 3$

$\dfrac{f(3)}{f(2)} = 3$

. . .

以上數式的乘積：

$\dfrac{f(100)}{f(1)} = 3^{99}$

$f(100) = 100\times 3^{99}$

5. 已知 $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$ 且 $f^{(n)}(x)=f(f(f\ldots f(x)\ldots))$，共 n 層，求 $f^{(10)}(0)$。

答： 令 x $=\sqrt{2x^2+1}$

$x^2 = 2x^2+1$

$x^2 = -1$。

即 $f(x) = \sqrt{2(x^2+1)-1}$

於是 $f^{(2)}(x) = \sqrt{2[f(x)^2+1]-1}$

$= \sqrt{2[2(x^2+1)-1+1]-1}$

$= \sqrt{2^2(x^2+1)-1}$

於是 $f^{(10)}(x) = \sqrt{2^{10}(x^2+1)-1}$

$f^{(10)}(0) = \sqrt{2^{10}-1} = \sqrt{1023}$。

6. 解 $\sqrt{11-\sqrt{11-\sqrt{11-x}}}=x$。

答： 考慮 $x^2=11-x$，即 $x^2+x-11=0$，

解得 x $= \dfrac{-(1)\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(-11)}}{2(1)} = \dfrac{-1\pm\sqrt{45}}{2}$

由於 $x>0$，故 $x=\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{2}$。

7. 設 $f^{(n)}(x)=f(f(f\ldots f(x)\ldots))$，共 n 層，若 $f^{(5)}(x)=32x+127$，求 $f(5)$。

答： 設 $f(x)=ax+b$，

則 $a^5=32$，即 $a=2$。

及 $\frac{a^5-1}{a-1}b = 93$

$\frac{32-1}{2-1}b = 93$

b = 3。

所以 $f(x)=2x+3$，即 $f(5)=2(5)+3=11$。

8. 如果 $F(n)$ 是一個函數，其中 $F(1)=F(2)=F(3)=1$，同時 $F(n+1)=\frac{F(n)\times F(n-1)+1}{F(n-2)}$，求 $F(6)$ 的值。

(AHSME 1970)(HKMO 2012/13 決賽個人)

答： $F(4) = \frac{F(3)\times F(2)+1}{F(1)} = \frac{1\times 1+1}{1} = 2$；

$F(5) = \frac{F(4)\times F(3)+1}{F(2)} = \frac{2\times 1+1}{1} = 3$；

$F(6) = \frac{F(5)\times F(4)+1}{F(3)} = \frac{3\times 2+1}{1} = 7$。

9. 已知數列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=3$、 $a_{n+1}=3a_n+1$（$n\in N^+$），求數列 $\{a_n\}$ 的表示式。

答： 設 $a_{n+1}+p = 3(a_n+p)$

$3a_n+1+p = 3a_n+3p$

$1+p = 3p$

p = $\frac{1}{2}$

即 $a_1+\frac{1}{2},a_2+\frac{1}{2},a_3+\frac{1}{2},\ldots$

組成一首項為 $3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$ ，公比為 3 的等比數列。

$a_n+\frac{1}{2} = 3^{n-1}(\frac{7}{2})$，

$a_n = 3^{n-1}(\frac{7}{2})-\frac{1}{2}$。

10. 已知數列$\{a_n\}$滿足 $a_1=5$ 及 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n-4}$ （$n\in N^+$），求 a_n 的表示式。

答： $\dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{-4}{a_n}+3$

考慮 $\dfrac{1}{a_{n+1}}+p = \dfrac{-4}{a_n}+3+p = -4(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{4+p}{4})$

令 $p=-\dfrac{3+p}{4}$ 解得 $p=-\dfrac{3}{5}$。

代入後得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{3}{5}=-4(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{3}{5})$

所以 $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{3}{5} = (-4)^{n-1}(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{3}{5}) = (-4)^{n-1}(\dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5})$

$= (-4)^{n-1}(-\dfrac{2}{5}) = \dfrac{(-1)^n\times 4^{n-1}\times 2}{5}$

所以 $a_n = \dfrac{5}{(-1)^n\times 2^{2n-1}+3}$。

數學科學是一個不可分割的有機整體，
它的生命力在於各部分之間的聯繫。

德國數學家

希爾伯特

(David Hilbert 1862-1943)

淺問

1. 對於所有實數 x，函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+4)+f(x-4)=f(x)$，則它是周期函數。求這函數的最小周期。（AHSME 1997）

2. 已知數列$\{a_n\}$滿足 $a_1=1$ 及 $a_{n+1}=3a_n+2$（$n\in N^+$），求 a_{100} 的值。

3. 已知數列$\{a_n\}$滿足 $a_1=2$、$a_2=3$及$a_{n+2}=-4a_{n+1}+5a_n$（$n\in N^+$），求 a_n。

4. 已知數列$\{a_n\}$滿足 $a_1=3$ 及 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+4}$（$n\in N^+$），求 a_{100} 的值。

5. 已知 $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$，及$x_1=1$，$x_n=f(x_{n-1})$，求x_{99}。
（HKMO 1996/97 初賽團體）

6. 已知數列$\{a_n\}$滿足 $a_1=3$ 及 $a_{n+1}=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$，求 a_{2012} 的值。

7. 已知數列 $\{a_n\}$ 任意連續三項的和為 20，且$a_4=9, a_{12}=7$，求a_{2000} 的值。

8. 已知數列 x_n，滿足 $(n+1)x_{n+1}=x_n+n$ 且 $x_1=2$，求 x_{2005}。

9. 已知 $f(x)=6x-4$且 $f^{(n)}(x)=f(f(f\ldots f(x)\ldots))$，共 n 層，求 $f^{(6)}(4)$。

10. 解 $\sqrt{31-\sqrt{31-x}}=x$。（HKMO 2012/13 初賽個人）

11. 設 $f(0)=0$，$f(n)=f(n-1)+3$ 當 $n=1,2,3,\ldots$。若 $2f(S)=3996$，求 S 的值。（HKMO 1999/2000 決賽個人）

12. 若 $f(1)=7$ 及 $f(x+1)=2f(x)$，求 $f(6)$ 的值。（FWMT-C 2004）

13. 有 5 隻猴子在海邊發現一堆桃子，決定第二天來平分。第二天清晨，第一隻猴子最早來到，它左分右分分不開，就朝海中扔了一隻，餘下的恰好分成五份，牠拿上自己一份便走了。第二、三、四、五隻猴子也遇上同樣的問題，採用同樣的方法，都是扔掉一隻後，恰好可以分成五份。問這堆桃子至少有多少隻？

詳答

1 把 $x+4$ 代 x 有 $f(x+8)+f(x)=f(x+4)$。
把上式和原有數式相加有

$$f(x+8)+f(x+4)+f(x)+f(x-4) = f(x)+f(x+4)$$
$$f(x+8)+f(x-4) = 0$$
$$f(x+8) = -f(x-4)$$

把 x 代 $x+8$ 有 $f(x)=-f(x-12)=-[-f(x-24)]=f(x-24)$，
所以最小周期為 24。

2. 考慮 $a_{n+1}+p = 3a_n+2+p$

$$a_{n+1}+p = 3(a_n+\frac{2+p}{3})$$

令 $p=\frac{2+p}{3}$ 解得 $p=1$。

所以 $a_{n+1}+1 = 3(a_n+1)$，其中 $n\ge 1$。

$$a_{100}+1 = 3(3(3(...3(a_1+1)))...) = 3^{99}(1+1)$$

所以 $a_{100} = 2\times 3^{99}-1$

3. $a_{n+2}+pa_{n+1} = (p-4)a_{n+1}+5a_n = (p-4)(a_{n+1}+\frac{5a_n}{p-4})$

令 $p = \frac{5}{p-4}$

$p^2-4p-5 = 0$ 解得 $p=5$ 或 -1。

代 $p=-1$， $a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$。

再令 $b_n=a_{n+1}-a_n$。這樣 $\{b_n\}$ 成為一等比數列且公比為 5。

再取 $n=1,2,3,\ldots,n-1$，把各式相加，得

$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1} = (a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_2-a_1)$$

$$\frac{5^n-1}{5-1} = a_n-a_1$$

$$a_n = \frac{5^n-1}{4}+3 = \frac{1}{4}(5^n+11)$$

4. $$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4}{a_n}+3$$

考慮 $\frac{1}{a_{n+1}}+p = \frac{4}{a_n}+3+p = 4(\frac{1}{a_n}+\frac{3+p}{4})$

令 $p=\frac{3+p}{4}$ 解得 $p=1$。

代入後得 $\frac{1}{a_{n+1}}+1=4(\frac{1}{a_n}+1)$

所以 $\frac{1}{a_{100}}+1 = 4^{99}(\frac{1}{a_1}+1) = 4^{99}(\frac{1}{3}+1) = \frac{4^{100}}{3}$

所以 $a_{100} = \frac{3}{4^{100}-3}$

5. $\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x_{n-1}}$，

所以 $\frac{1}{x_{99}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{x_1}$ = $\frac{1}{x_{99}}=\frac{1}{2}\times 98+\frac{1}{1}$ = 50

即 $x_{99}=\frac{1}{50}$。

6 $a_1=3$， $a_2=\frac{1+3}{1-3}=-2$， $a_3=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$，$a_4=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

$$a_5=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

所以 $a_{4n+k}=a_k$，其中 $k=0,1,2,3$。

$2012=4\times 503$，即 $a_{2012}=a_4=\frac{1}{2}$。

7. 由 $a_1+a_2+a_3=a_2+a_3+a_4=20$，得 $a_4=a_1$ 由此得數列 $\{a_n\}$ 為周期 3，所以 $a_4=a_1=9, a_{12}=a_3=7$，即 $a_{2000}=a_2=20-9-7=4$。

8.
$$x_{n+1} = \frac{x_n+n}{n+1}$$
$$x_{n+1}-1 = \frac{x_n+n}{n+1}-1$$
$$x_{n+1}-1 = \frac{x_n+n-n-1}{n+1} = \frac{x_n-1}{n+1}$$
$$= \frac{x_n-1}{n+1} = \frac{x_{n-1}-1}{(n+1)n} = \cdots$$
$$= \frac{x_1-1}{(n+1)n(n-1)\ldots 2} = \frac{1}{(n+1)!}$$

所以 $x_{2005}-1 = \frac{1}{2005!}$，即 $x_{2005}=\frac{2005!+1}{2005!}$。

9. $f^{(6)}(x) = 6^6 x + \frac{6^6-1}{6-1}(-4) = 46656x - 37324$。

所以 $f^{(6)}(4) = 46656(4) - 37324 = 149300$。

10. 考慮 $x^2 = 31 - x$，即 $x^2 + x - 31 = 0$，

解得 x $= \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-31)}}{2(1)}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{125}}{2} = \frac{-1 \pm 5\sqrt{5}}{2}$

顯然 $x > 0$，故 $x = \frac{-1 + 5\sqrt{5}}{2}$。

11. $f(n) = f(n-1) + 3 = f(n-2) + 2 \times 3 = \cdots$

$= f(n-n) + 3n = 3n$

$2f(S) = 2 \times 3S = 3996$

S $= 666$

12. $f(x) = 2^{x-1} f(1)$，

所以 $f(6) = 2^{6-1} \times 7 = 224$。

13. 設桃子一共有 k 個，第一隻猴子扔掉一隻並拿走自己一份之後，桃子還有 a_i 個。

則 $a_i = \frac{4}{5}(a_{i-1} - 1)$，其中 $i = 1,2,3,4,5$ 及 $a_0 = k$。

設 $f(x) = \frac{4}{5}(x-1) = \frac{4}{5}(x+4) - 4$。

則 $a_1 = f(a_0) = \frac{4}{5}(k+4) - 4$，

$a_2 = f(a_1) = \frac{4}{5}[\frac{4}{5}(k+4) - 4 + 4] - 4 = (\frac{4}{5})^2 (k+4) - 4$，

如此類推，

$a_5 = (\frac{4}{5})^5 (k+4) - 4$。

因為 a_5 為正整數，即 $5^5 \mid (k+4)$，

取最小值 $k + 4 = 3125$，即 $k = 3121$。

故這堆桃子至少有 3121 隻。

（註：問題為諾貝爾物理學獎得主李政道於 1979 年提出的。）