「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

數列 － 費波拿契數列

摘要

1. 費波拿契（Fibonacci）數列 $\{F_n\}$ 的定義：
   $F_1 = F_2 = 1$，$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$。
   $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$
2. 運用特徵根法解遞歸數列：
   若 $a_{n+2} = ka_{n+1} + la_n$，即 $a_n = \lambda_1\alpha^n + \lambda_2\beta^n$，
   其中 α, β 為方程 $x^2 = kx + l$ 的兩根。
3. 認識與費波拿契數相關的恆特式：
   (a) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n{}^2 = (-1)^n$（卡西尼 Cassini）
   (b) $F_{m+n-1} = F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1}$
   (c) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
   (d) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$
   (e) $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$
4. 認識費波拿契數的因子和倍數的性質：
   (a) $F_n \mid F_{kn}$
   (b) $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$，特別地 $(F_n, F_{n+1}) = (F_n, F_{n+2}) = 1$。
5. 認識齊肯多夫（Zeckendorf）定理：
   任何一個正整數必然表示成一組序數 2 或以上且互不相等及互不相鄰的費波拿契數之和。
6. 淺介泰波拿契數（Tribonacci）的定義：
   $T_1 = T_2 = T_3 = 1$，$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$。

拾例

1. 定義數列 $\{F_n\}$ 為 $F_1 = F_2 = 1$ 及對所有 3 或以上的整數 n，$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$。求 F_n 的通式。

答：特徵方程為 $x^2 - x - 1 = 0$，特徵根為 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$。

故得 $F_n = k_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + k_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

即
$$k_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + k_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1$$
$$\frac{1}{2}(k_1 + k_2) + \frac{\sqrt{5}}{2}(k_1 - k_2) = 1$$

及
$$k_1(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) + k_2(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) = 1$$
$$\frac{3}{2}(k_1 + k_2) + \frac{\sqrt{5}}{2}(k_1 - k_2) = 1$$

兩式相減，得
$$k_1 + k_2 = 0$$

代入得
$$\frac{\sqrt{5}}{2}(k_1 - k_2) = 1$$
$$k_1 - k_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

故 $k_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, k_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$。

即 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$

2. 在首 2000 個費波拿契數中，有多少個是 5 的倍數？

答：留意費波拿契數列：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

我們發現五個費波拿契數，便有一個是 5 的倍數。

故答案為 $2000 \times \frac{1}{5} = 400$。

3. 求 F_{100}, F_{10} 的最大公因子。

答： $(F_{100}, F_{10}) = F_{10} = 55$。

4. 求 F_{16} 的最大素因子。

答： $F_{16} = F_9^{\ 2} - F_7^{\ 2} = (F_9 - F_7)(F_9 + F_7)$

$= (34+13)(34-13) = 47 \times 21 = 3 \times 7 \times 47$

故其最大素因子為 47。

5. 試把 1974 表示成一組互不相等且互不相鄰的費波拿契數之和

答： 1974 = 1597 + 377 = $F_{17} + F_{14}$。

6. 求下列和式的值：

(a) $\sum_{i=1}^{5} F_i$

(b) $\sum_{i=1}^{5} F_{2i-1}$

(c) $\sum_{i=1}^{5} F_{2i}$

答： (a) $\sum_{i=1}^{5} F_i = F_7 - 1 = 13 - 1$

$= 12$

(b) $\sum_{i=1}^{5} F_{2i-1} = F_{10} = 55$

(c) $\sum_{i=1}^{5} F_{2i} = F_{11} - 1 = 89 - 1$

$= 88$

7.　智強共有十五片朱古力。每天早上，他可以選擇吃一片朱古力或兩片朱古力，不可以不吃。問智強共有多少種不同的吃朱古力方法？

答：　解法一：

智強選擇吃兩片朱古力的天數可以為 0 至 7 天。

若智強選擇在 0 天吃兩片朱古力，即他有 15 天吃一片朱古力，

故方法數為　$C_0^{16+0} = C_0^{15} = 1$；

若智強選擇在 1 天吃兩片朱古力，即他有 13 天吃一片朱古力，

故方法數為　$C_1^{13+1} = C_1^{14} = 14$；

若智強選擇在 2 天吃兩片朱古力，即他有 11 天吃一片朱古力，

故方法數為　$C_2^{11+2} = C_2^{13} = 78$；

若智強選擇在 3 天吃兩片朱古力，即他有 9 天吃一片朱古力，

故方法數為　$C_3^{9+3} = C_3^{12} = 220$；

若智強選擇在 4 天吃兩片朱古力，即他有 7 天吃一片朱古力，

故方法數為　$C_4^{7+4} = C_4^{11} = 330$；

若智強選擇在 5 天吃兩片朱古力，即他有 5 天吃一片朱古力，

故方法數為　$C_5^{5+5} = C_5^{10} = 252$；

若智強選擇在 6 天吃兩片朱古力，即他有 3 天吃一片朱古力，

故方法數為　$C_6^{3+6} = C_6^{9} = 84$；

若智強選擇在 7 天吃兩片朱古力，即他有 1 天吃一片朱古力，

故方法數為　$C_7^{1+7} = C_7^{8} = 8$；

故智強共有 $1+14+78+220+330+252+84+8=987$ 種方法。

解法二：

把問題考慮成數列 $\{a_n\}$，表示到第 n 級的方法數目。

$a_1 = 1$，　$a_2 = 2$，　$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（其中 $n \geq 3$）。

由此得　$a_3 = 1+2 = 3$，　$a_4 = 2+3 = 5$，

$a_5 = 3+5 = 8$，　$a_6 = 5+8 = 13$，

$a_7 = 8+13 = 21$，　$a_8 = 13+21 = 34$，

$a_9 = 21+34 = 55$，　$a_{10} = 34+55 = 89$，

$a_{11} = 55+89 = 144$，　$a_{12} = 89+144 = 233$，

$a_{13} = 144+233 = 377$，　$a_{14} = 233+377 = 610$，

$a_{15} = 377+610 = 987$。

故智強共有 987 種方法。

8. 雅麗訓練上樓梯賽跑， 她每步可以上 1 階 或 2 階。這樣上到第十階，但不踏第六階和第四階有多少種方法？

答： 把問題考慮成數列 $\{a_n\}$，表示到第 n 級的方法數目。

$a_1 = 1$， $a_2 = 2$， $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ （其中 $n \geq 3$）。

由此得 $a_3 = 1 + 2 = 3$， $a_4 = 0$，

$a_5 = 3 + 0 = 3$， $a_6 = 0$， $a_7 = 0$，

$a_7 = 3 + 0 = 3$， $a_8 = 0 + 3 = 3$，

$a_9 = 3 + 3 = 6$， $a_{10} = 3 + 6 = 9$

故雅麗共有 9 種方法。

9. 雅麗訓練上樓梯賽跑，她每步可以上 1 階、2 階或 3 階。這樣上到第十階，但不踏第六階和第四階有多少種方法？

答： 把問題考慮成數列 $\{a_n\}$，表示到第 n 級的方法數目。

$a_1 = 1$， $a_2 = 2$， $a_3 = 4$，

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ （其中 $n \geq 4$）。

由此得 $a_4 = 0$， $a_5 = 2 + 4 + 0 = 6$，

$a_6 = 0$， $a_7 = 0 + 6 + 0 = 6$，

$a_8 = 6 + 0 + 6 = 12$， $a_9 = 0 + 6 + 12 = 18$，

$a_{10} = 6 + 12 + 18 = 36$。

故雅麗共有 36 種方法。

10. 泰波拿契數列（Tribonacci Sequence）定義如下，$a_1=a_2=a_3=1$，及對所有正整數 n，$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n$。已知 $a_{19}=25281$、$a_{20}=46499$ 及 $a_{21}=85525$。求 $\sum_{k=1}^{19}a_k$ 的值。

答： 設總和為 s。另 $a_n=a_{n+3}-a_{n+2}-a_{n+1}$。

$$
\begin{aligned}
\text{所以 } s &= a_{19}+\sum_{k=1}^{18}(a_{k+3}-a_{k+2}-a_{k+1})\\
&= a_{19}+\sum_{k=1}^{18}a_{k+3}-\sum_{k=1}^{18}a_{k+2}-\sum_{k=1}^{18}a_{k+1}\\
&= a_{19}+(\sum_{k=4}^{21}a_k-\sum_{k=3}^{20}a_k)-\sum_{k=2}^{19}a_k\\
&= a_{19}+(a_{21}-a_3)-\sum_{k=2}^{19}a_k\\
&= a_{19}+(a_{21}-a_3)-(s-a_1)\\
2s &= a_1-a_3+a_{19}+a_{21} = a_{19}+a_{21}\\
s &= \frac{a_{19}+a_{21}}{2} = \frac{25281+46499}{2}\\
&= 35890\text{。}
\end{aligned}
$$

數學中最危險的詞語是「顯然易見」。

"Obvious" is the most dangerous word in mathematics.

美國數學家、小說家

貝爾

(Eric Temple Bell 1883-1960)

淺問

1. 寫出 10000 以內的費波拿契數、費波拿契素數和費波拿契平方數。

2. 投擲兩顆均勻的骰子，求點數之和為費波拿契數的概率。

3. 求下列數組的最大公因子：
(a) F_{20},F_{25} (b) F_{30},F_{36} (c) F_{40},F_{50}

4. 求費波拿契數 F_{20} 的最大素因子。

5. 求費波拿契數 F_{2012} 除以下列各數的餘數。
(a) 7 (b) 9 (c) 11

6. 試把下列各數表示成一組互不相等且互不相鄰的費波拿契數之和：
(a) 12 (b) 345 (c) 6789

7. 求下列和式的值：
(a) $\sum_{i=1}^{10} F_i$ (b) $\sum_{i=1}^{10} F_{2i-1}$ (c) $\sum_{i=1}^{10} F_{2i}$

8. 定義泰波拿契數 T_n， $T_1=T_2=T_3=1$ 及 $T_{n+3}=T_{n+2}+T_{n+1}+T_n$， 其中 n 為正整數。求 10000 以內的泰波拿契數。

9. 一數列定義如下， $a_1=a_2=a_3=1$，及對所有正整數 n，$a_{n+3}=a_{n+2}+a_{n+1}+a_n$。已知 $a_{28}=6090307$ 、$a_{29}=11201821$ 及 $a_{30}=20603361$。求 $\sum_{k=1}^{28} a_k$ 除以 1000 的餘數。（AIME 2006）

10. 一數列定義如下， $a_1=1,a_2=0,a_n=6a_{n-1}-8a_{n-2}(n\geq 3)$，求 a_{100} 的值。

11. 大虎訓練上樓梯賽跑，他每步可以上一階或兩階，這樣上到第十七階但不踏第六階、第十三階和第十九階，那麼不同的方法共有多少種？

12. 小虎訓練上樓梯賽跑，他每步可以上一階或兩階或三階，這樣上到第二十階但不踏第六階、第十三階和第十九階，那麼不同的方法共有多少種？

詳答

1. 10000 以內的費波拿契數有：

$F_1 = F_2 = 1$， $F_3 = 1+1 = 2$， $F_4 = 1+2 = 3$，
$F_5 = 2+3 = 5$， $F_6 = 3+5 = 8$， $F_7 = 5+8 = 13$，
$F_8 = 8+13 = 21$， $F_9 = 13+21 = 34$， $F_{10} = 21+34 = 55$，
$F_{11} = 34+55 = 89$， $F_{12} = 55+89 = 144$，
$F_{13} = 89+144 = 233$， $F_{14} = 144+233 = 377$，
$F_{15} = 233+377 = 610$， $F_{16} = 377+610 = 987$，
$F_{17} = 610+987 = 1597$， $F_{18} = 987+1597 = 2584$，
$F_{19} = 1597+2584 = 4181$， $F_{20} = 2584+4181 = 6765$。

10000 以內的費波拿契素數有：

$F_3 = 2$， $F_4 = 3$， $F_5 = 5$， $F_7 = 13$， $F_{11} = 89$，
$F_{13} = 233$， $F_{17} = 1597$。

10000 以內的費波拿契平方數有：

$F_1 = F_2 = 1$， $F_{12} = 144$。

2. 投擲兩顆骰子，所得點數之和介乎 2 至 12 間。
當中的費波拿契數包括 2, 3, 5, 8。
即符合要求的點數序偶有 (1, 1)、(1, 2)、(2, 1)、(1, 4)、(2, 3)、(3, 2)、(4, 1)、(2, 6)、(3, 5)、(4, 4)、(5, 3)、(6, 2)。共十二個序偶。
故所求概率為 $\dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$。

3. (a) $(F_{20}, F_{25}) = F_{(20,25)} = F_5 = 5$。
(b) $(F_{30}, F_{36}) = F_{(30,36)} = F_6 = 8$。
(c) $(F_{40}, F_{50}) = F_{(40,50)} = F_{10} = 55$。

4. $$F_{20} = F_{11}^{\ 2} - F_9^{\ 2} = (F_{11} - F_9)(F_{11} + F_9)$$
$$= (89+34)(89-34) = 123 \times 55 = 3 \times 5 \times 11 \times 41$$
故其最大素因子為 41。

5. (a) 列舉費波拿契數在模 7 下的同餘：

1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 0, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 0, 1, 1, ...

發現為周期 16 的周期數列。

另 $F_{2012} \equiv F_{16\times125+12} \equiv F_{12} \equiv 4 \pmod 7$。

所以餘數為 4。

(b) 列舉費波拿契數在模 9 下的同餘：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 0, 1, 1, ...

發現為周期 24 的周期數列。

另 $F_{2012} \equiv F_{83\times24+20} \equiv F_{20} \equiv 6 \pmod 9$。

所以餘數為 6。

(c) 列舉費波拿契數在模 11 下的同餘：

1, 1, 2, 3, 5, 8, 2, 10, 1, 0, 1, 1, ...

發現為周期 10 的周期數列。

另 $F_{2012} \equiv F_{10\times201+2} \equiv F_{2} \equiv 1 \pmod 7$。

所以餘數為 1。

6. (a) $12 = 8+3+1 = F_2+F_4+F_6$

(b) $345 = 233+89+21+2 = F_3+F_8+F_{11}+F_{13}$

(c) $6789 = 6765+21+3 = F_4+F_8+F_{20}$

7. (a) $\sum_{i=1}^{10} F_i = F_{12}-1 = 144-1 = 143$

(b) $\sum_{i=1}^{10} F_{2i-1} = F_{20} = 6765$

(c) $\sum_{i=1}^{10} F_{2i} = F_{21}-1 = 10946-1 = 10945$

8. $T_1 = T_2 = T_3 = 1$， $T_4 = 1+1+1 = 3$，
$T_5 = 1+1+3 = 5$， $T_6 = 1+3+5 = 9$，
$T_7 = 3+5+9 = 17$， $T_8 = 5+9+17 = 31$，
$T_9 = 9+17+31 = 57$， $T_{10} = 17+31+57 = 105$，
$T_{11} = 31+57+105 = 193$， $T_{12} = 57+105+193 = 355$，
$T_{13} = 105+193+355 = 653$， $T_{14} = 193+355+653 = 1201$，
$T_{15} = 355+653+1201 = 2209$， $T_{16} = 653+1201+2209 = 4063$，
$T_{17} = 1201+2209+4063 = 7473$。

9. 設總和為 s。另 $a_n = a_{n+3} - a_{n+2} - a_{n+1}$。

所以 s
$$= a_{28} + \sum_{k=1}^{27}(a_{k+3} - a_{k+2} - a_{k+1})$$
$$= a_{28} + \sum_{k=1}^{27} a_{k+3} - \sum_{k=1}^{27} a_{k+2} - \sum_{k=1}^{27} a_{k+1}$$
$$= a_{28} + (\sum_{k=4}^{30} a_k - \sum_{k=3}^{29} a_k) - \sum_{k=2}^{28} a_k$$
$$= a_{28} + (a_{30} - a_3) - \sum_{k=2}^{28} a_k$$
$$= a_{28} + (a_{30} - a_3) - (s - a_1)$$
$$2s = a_1 - a_3 + a_{28} + a_{30} = a_{28} + a_{30}$$
$$s = \frac{a_{28} + a_{30}}{2} = \frac{20603361 + 6090307}{2}$$
$$= 13346834$$
所求餘數為 834。

10. 特徵方程為 $x^2 - 6x + 8 = 0$，特徵值為 2, 4。

故設 $a_n = k_1(2)^n + k_2(4)^n$，

得
$$2k_1 + 4k_2 = 1$$
$$4k_1 + 16k_2 = 0$$
解得 $k_1 = 1, k_2 = -\frac{1}{4}$。

所以 $a_n = 2^n - \frac{1}{4} \times 4^n = 2^n - 4^{n-1}$

$a_n = 2^{100} - 4^{99}$。

11. 以數列 $\{a_n\}$ 表示上第 n 階的方法數。

這樣 $a_1=1$，　$a_2=2$，　$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$（其中 $n\geq 3$）。

另 $a_6=a_{13}=a_{19}=0$。

$a_3=1+2=3$，　$a_4=2+3=5$，

$a_5=3+5=8$，　$a_6=0$，

$a_7=8+0=8$，　$a_8=0+8=8$，

$a_9=8+8=16$，　$a_{10}=8+16=24$，

$a_{11}=16+24=40$，　$a_{12}=24+40=64$，

$a_{13}=0$，　$a_{14}=64+0=64$，

$a_{15}=0+64=64$，　$a_{16}=64+64=128$，

$a_{17}=64+128=192$，　$a_{18}=128+192=320$，

$a_{19}=0$，　$a_{20}=320+0=320$。

故不同的方法數為 320。

12. 以數列 $\{b_n\}$ 表示上第 n 階的方法數。

這樣 $b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=4$，$b_n=b_{n-1}+b_{n-2}+b_{n-3}$（其中 $n\geq 4$）。

另 $b_6=b_{13}=b_{19}=0$。

$b_4=1+2+4=7$，　$b_5=2+4+7=11$，

$b_6=0$，　$b_7=7+11+0=18$，

$b_8=11+0+18=29$，　$b_9=0+18+29=47$，

$b_{10}=18+29+47=94$，　$b_{11}=29+47+94=170$，

$b_{12}=47+94+170=311$，　$b_{13}=0$，

$b_{14}=170+311+0=481$，　$b_{15}=311+0+481=792$，

$b_{16}=0+481+792=1273$，　$b_{17}=481+792+1273=2546$，

$b_{18}=792+1273+2546=4611$，

$b_{19}=0$，　$b_{20}=2546+4611+0=7157$。

故不同的方法數為 7157。