「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

解幾 － 直線圖形

摘要

1. 計算三角形內中線的長度及方程。
2. 計算兩直線交角及找角平分線的方程：

   兩直線交角為 $\arctan\left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ 。
3. 計算點線距離：

   若 $P(x_1, y_1)$ 與直線 $Ax + By + C = 0$ 的距離

   d = $\left|\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$ 。
4. 計算兩平行線間的距離：

   給定兩平行線 $Ax + By + C_1 = 0$ 及 $Ax + By + C_2 = 0$，

   兩線間的距離 d = $\left|\dfrac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$ 。
5. 認識多邊形面積計算。

   $$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \dots & \dots \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

   $$= \frac{1}{2}\left|(x_1 y_2 + x_2 y_3 + \ldots + x_n y_1) - (x_2 y_1 + x_3 y_2 + \ldots + x_1 y_n)\right|$$
6. 認識三角形垂線的方程及長度計算。
7. 認識三角形內重心、垂心的坐標計算。
8. 求兩直線的角平分線，進而求三角形的內或外角平分線：

   給定兩直線 $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ 及 $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$，

   其角平分線為 $\left|\dfrac{A_1 x + B_1 y + C}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\right| = \left|\dfrac{A_2 x + B_2 y + C}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right|$ 。

拾例

1. 在直角坐標系統中，已知 A(6,-4)，在 x 軸上確定點 P 使 ΔAOP 為等腰三角形。問符合條件的 P 點共有多少點？

答： 情況一： OP = AO

$$AO = \sqrt{(6-0)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}\text{。}$$

即有兩點符合要求，$(\pm 2\sqrt{13},0)$。

情況二： AP = AO

設 $P(x.0)$

$$AP = \sqrt{(6-x)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{52}$$

$$\sqrt{x^2-12x+52} = \sqrt{52}$$

$$x^2-12x+52 = 52$$

$$x^2-12x = 0$$

$x=0$（捨去）或 $x=12$。

即有一點符合要求，$(12,0)$。

情況三： OP = AP

設 $P(x.0)$

$$AP = \sqrt{(6-x)^2+(-4-0)^2} = x$$

$$x^2-12x+52 = x^2$$

$$12x-52 = 0$$

$$x = \frac{13}{4}$$

即有一點符合要求，$(\frac{13}{4},0)$。

所以共有四點符合要求。

2. 求原點至 $3x+4y=100$ 的距離。（FWMT-J 1998）

答： 距離 $= \left|\frac{3(0)+4(0)-100}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 20$。

3. 求兩平行線 $5x+12y+6=0$ 及 $10x+24y-1=0$ 之間的距離。

答： $5x+12y+6=0$，即 $10x+24y+12=0$。

故兩線間的距離為 $\left|\frac{12+1}{\sqrt{5^2+12^2}}\right| = \left|\frac{13}{13}\right| = 1$。

4. 若 θ 為兩直線 $x+2y-3=0$ 及 $x=5y$ 之間的交角，求 $\tan\theta$。

答： 直線 $x+2y-3=0$ 可改寫成 $y=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$，斜率為 $-\frac{1}{2}$。

直線 $x=5y$ 可改寫成 $y=\frac{x}{5}$， 斜率為 $\frac{1}{5}$。

故 $\tan\theta = \left|\dfrac{\frac{1}{5}-(-\frac{1}{2})}{1+\frac{1}{5}\times(-\frac{1}{2})}\right| = \left|\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}}\right|$

$= \left|\dfrac{7/10}{9/10}\right| = \dfrac{7}{9}$

5. 求兩直線 $x-3y+1=0$ 及 $3x-y+3=0$ 的角平分線。

答： 角平分線方程為

$$\left|\frac{x-3y+1}{\sqrt{1^2+3^2}}\right| = \left|\frac{3x-y+3}{\sqrt{3^2+1^2}}\right|$$

$$\frac{x-3y+1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{3x-y+3}{\sqrt{10}}$$

$$x-3y+1 = \pm(3x-y+3)$$

$2x+2y+2=0$ 或 $4x-4y+4=0$

即 $x+y+1=0$ 或 $x-y+1=0$。

6. 已知 ΔABO 的頂點為 $A(-1,2)$、$B(3,-4)$ 及原點，求該三角形的面積。

答： 面積 $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\left|(0+4+0)-(0+6+0)\right|$

$= \dfrac{1}{2}\left|-2\right| = 1$。

7. 以 A(1, 9), B(8, 9), C(−6, −4) 為頂點的三角形內的一點 P，$\Delta PAB, \Delta PBC. \Delta PCA$ 的面積相等，求 P 點坐標。

答： 設 $P(x, y)$，

ΔPAB 的面積 $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 9 \\ 8 & 9 \\ x & y \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(9x + 9 + 8y - y - 72 - 9x)$

$= \frac{7y - 63}{2}$

ΔPBC 的面積 $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ 8 & 9 \\ -6 & -4 \\ x & y \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(9x - 32 - 6y - 8y + 54 + 4x)$

$= \frac{13x - 14y + 22}{2}$

ΔPCA 的面積 $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ -6 & -4 \\ 1 & 9 \\ x & y \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(-4x - 54 + y + 6y + 4 - 9x)$

$= \frac{-13x + 7y - 50}{2}$

由於面積相等，得 $\begin{cases} 13x - 14y + 22 = 7y - 63 \\ -13x + 7y - 50 = 7y - 63 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} 13x - 21y + 85 = 0 \\ 13x - 13 = 0 \end{cases}$，

解得 $x = 1, y = \frac{14}{3}$

解得 $P(x, y) = (1, \frac{14}{3})$。

（註： P 即重心，可以求重心的方法求得。）

8.　已知三角形的頂點為 A(1,9), B(8,9), C(-6.-4)，求三角形重心的坐標。

答：　重心坐標為 $(\frac{1+8-6}{3},\frac{9+9-4}{3})$ = $(1,\frac{14}{3})$ 。

9.　四邊形 ABCD 的四頂點坐標分別為 $A(1,9),B(7,4),C(-1,-9),D(-7,-4)$ 。求該四邊形兩對邊中點連線的交點坐標。

答：　由於四邊形對邊中點連線互相平分。

所以該點坐標為 $(\frac{1+7-1-7}{4},\frac{9+4-9-4}{4})=(0,0)$ 。

(註： 可證明四中點成平行四邊形，
兩對邊中點連線的交點為該平行四邊形的中心點。)

10.　以 A(1,1)、B(4,2)、C(3,4) 為頂點的 ΔABC ，從頂點 A 向對邊 BC 引垂線。若垂足為 H，求 H 點坐標。

答：　直線 BC 的斜率為 $\frac{4-2}{3-4}$ = -2

直線 BC 的方程為 $\frac{y-2}{x-4}$ = -2

$y-2$ = $-2x+4$

$2x+y-6$ = 0

故垂線的方程為 $\frac{y-1}{x-1}$ = $\frac{1}{2}$

$2y-2$ = $x-1$

$x-2y+1$ = 0

$\begin{cases}2x+y-6=0\\x-2y+1=0\end{cases}$ ，解得 $x=\frac{11}{5},y=\frac{8}{5}$

故 H 點的坐標為 $(\frac{11}{5},\frac{8}{5})$ 。

淺問

1. 若下列兩直線的交角為 θ，求 $\tan\theta$ 的值。
   (a) $x+2y=0$ 及 $3x-4y+5=0$
   (b) $6x-7y+8=0$ 及 $9y-10=0$

2. 求點 (2, -3) 與下列直線的最短距離：
   (a) $x+2y-3=0$　　(b) $12x-5y=0$

3. 設 A(1,1), B(9,7) 和 C (7,1) 為平面上的三點。若 D 是 AB 上的一點，使得 $AB\perp CD$。求 CD 的長度。(培正 2004 中二)

4. 求平行直線 $3x+4y-6=0$ 及 $6x+8y-3=0$ 之間的距離。

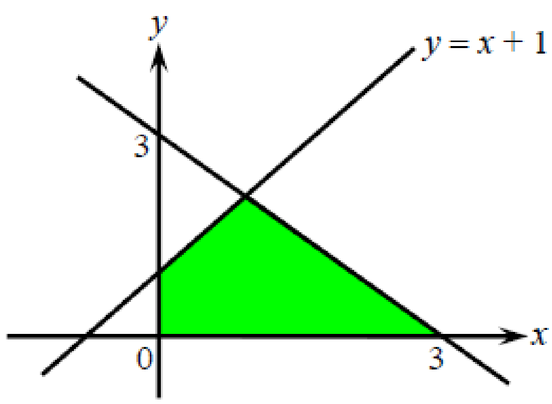
5. 已知三點 A(-1, 2)、B(3, 4)、C(5, -6)，求
   (a) ΔABC 面積；
   (b) ΔABC 的重心坐標；
   (c) ΔABC 中自 A 至 BC 的垂線的長度和方程；
   (d) ΔABC 中自 B 至 CA 的中線的長度和方程；
   (e) ΔABC 中 AB 的垂直平分線的方程。

6. 已知直線 $l_1:2x-y=5$ 與 $l_2:x+2y=5$ 相交於 A 點，l_1,l_2 與 x 軸分別相交於 B、C 點。求
   (a) A, B, C 三點坐標；
   (b) A 點的內角分線。

7. 已知 ΔABC 的三頂點分別為 A(1, -1)、B(-4, 1)、C(4, 2)，求三點至各對邊的垂線方程，並求垂心坐標。

8. 求過點 $X(-2,3)$ 且與原點距離為 2 的直線方程。

9. 如右圖，陰影部分面積為 a ，求 a 。(HKMO 1995/96 決賽個人)



10. 已知三角形三個頂點是 A(3,-8), B(-4,6), C(7,0)，它的重心是 G，求 ΔGAB 的面積。

詳答

1. (a) $y=-\frac{1}{2}x$ 及 $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$，

故 $\tan\theta = \left|\dfrac{\frac{3}{4}-(-\frac{1}{2})}{1+\frac{3}{4}(-\frac{1}{2})}\right| = \left|\dfrac{5/4}{5/8}\right| = \dfrac{1}{2}$

(b) $y=\frac{6}{7}x+\frac{8}{7}$ 及 $y=\frac{10}{9}$，

故 $\tan\theta = \left|\dfrac{\frac{6}{7}-0}{1+\frac{6}{7}(0)}\right| = \dfrac{6}{7}$

2. (a) 最短距離 $= \left|\dfrac{(2)+2(-3)-3}{\sqrt{1^2+2^2}}\right| = \left|\dfrac{-7}{\sqrt{5}}\right| = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

(b) 最短距離 $= \left|\dfrac{12(2)-5(-3)}{\sqrt{12^2+5^2}}\right| = \left|\dfrac{39}{13}\right| = 3$

3. AB 的方程：

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{7-1}{9-1}$$
$$4(y-1) = 3(x-1)$$
$$3x-4y+1 = 0$$

CD $= \left|\dfrac{3(7)-4(1)+1}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \dfrac{18}{5}$。

4. 兩直線為 $6x+8y-12=0$ 及 $6x+8y-3=0$。

故兩平行線間的距離為 $\left|\dfrac{-3+12}{\sqrt{6^2+8^2}}\right| = \dfrac{9}{10}$。

5. (a) ΔABC 面積

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|-4-18+10-6-20-6\right| = 22$$

(b) 重心 $(\frac{-1+3+5}{3},\frac{2+4-6}{3}) = (\frac{7}{3},0)$

(c) BC 的方程：$\frac{y+6}{x-5}=\frac{4+6}{3-5}$ $y+6=-5(x-5)$

$5x+y-19=0$

垂線的長度 $\left|\frac{5(-1)+(2)-19}{\sqrt{5^2+1^2}}\right| = \frac{22}{\sqrt{26}} = \frac{11\sqrt{26}}{13}$

垂線的斜率 $= \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$

垂線的方程：$\frac{y-2}{x+1}=\frac{1}{5}$ $5(y-2)=x+1$

$x-5y+11=0$

(d) CA 的中點坐標：$(\frac{-1+5}{2},\frac{2-6}{2}) = (2,-2)$

中線距離：$\sqrt{(3-2)^2+(4+2)^2} = \sqrt{37}$

中線方程：$\frac{y-4}{x-3}=\frac{-2-4}{2-3}$ $y-4=6(x-3)$

$6x-y-14=0$

(e) AB 的中點坐標：$(\frac{-1+3}{2},\frac{2+4}{2}) = (1,3)$

AB 的斜率 $= \frac{4-2}{3+1} = \frac{1}{2}$

垂直平分線的斜率 $= -1\div\frac{1}{2} = -2$

垂直平分線的方程 ：$\frac{y-3}{x-1}=-2$

$y-3=-2(x-1)$

6. (a) 解 $\begin{cases}2x-y=5\\x+2y=5\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$，所以 A(3,1)。

代 $y=0$ 入兩式，得 B(2.5,0) 及 C(5,0)。

(b) 設內角平分線上的點 P(x,y)：

$$\left|\frac{2x-y-5}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{x+2y-5}{\sqrt{1^2+2^2}}\right|$$

$$\frac{2x-y-5}{\sqrt{5}} = \pm\frac{x+2y-5}{\sqrt{5}}$$

$2x-y-5=x+2y-5$ 或 $2x-y-5=-x-2y+5$

$x-3y=0$ 或 $3x+y-10=0$

留意，兩答案一為內角平分線，而另一為外角平分線，

判定方法有二，如下：

方法 1：

由於兩直線 l_1,l_2 的斜率分別為 2 及 $-\frac{1}{2}$。

而求得的兩直線的斜率分別為 $\frac{1}{3},-3$。

繪圖分析後，得斜率為 -3 的才是內角平分線，

即 $3x+y-10=0$。

方法 2：

求得的兩直線與 BC 的交點分別為 (0,0) 及 $(\frac{10}{3},0)$。

由於 $\frac{5}{2}<\frac{10}{3}<5$，

所以 $3x+y-10=0$ 才是內角平分線。

7. BC 的斜率 $= \frac{2-1}{4+4} = \frac{1}{8}$。

所以自 A 點的垂線斜率為 −8。

自 A 點的垂線方程為

$$\begin{aligned} \frac{y+1}{x-1} &= -8 \\ y+1 &= -8x+8 \\ 8x+y-7 &= 0 \end{aligned}$$

CA 的斜率 $= \frac{2+1}{4-1} = 1$。

所以自 B 點的垂線斜率為 −1。

自 B 點的垂線方程為

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{x+4} &= -1 \\ y-1 &= -x-4 \\ x+y+3 &= 0 \end{aligned}$$

AB 的斜率 $= \frac{1+1}{-4-1} = -\frac{2}{5}$。

所以自 C 點的垂線斜率為 $\frac{5}{2}$。

自 C 點的垂線方程為

$$\begin{aligned} \frac{y-2}{x-4} &= \frac{5}{2} \\ 2y-4 &= 5x-20 \\ 5x-2y-16 &= 0 \end{aligned}$$

解 $\begin{cases} 8x+y-7=0 \\ x+y+3=0 \end{cases}$，得垂心坐標 $(\frac{10}{7},-\frac{31}{7})$。

8. 設過點 $X(-2,3)$ 的直線的斜率為 m，則 $\frac{y+2}{x-3}=m$，

即 $mx-y+(2m+3)=0$。

若該直線與 x 軸垂直，則其方程為 $x=\pm 2$，故 $x=-2$ 符合要求。

另

$$\begin{aligned} \left|\frac{m(0)-(0)+2m+3}{\sqrt{m^2+1}}\right| &= 2 \\ 2m+3 &= 2\sqrt{m^2+1} \\ 4m^2+12m+9 &= 4m^2+4 \\ m &= -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

所以該直線方程為 $-\frac{5}{12}x-y+[2(-\frac{5}{12})+3]=0$，即 $5x+12y-26=0$。

9. 解法一：

直線 $y=x+1$ 的 y 軸截距為 1。

另一直線方程為 $x+y=3$，

故兩直線交點在 $(1,2)$。

所以 a = $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 1\\1 & 2\\3 & 0\\0 & 0\end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left|0-(1+6)\right|$

$= \frac{7}{2}$

解法二：

a $= \frac{3\times3}{2}-\frac{2\times1}{2} = \frac{9}{2}-1 = \frac{7}{2}$

10. G 點的坐標為 $(\frac{3-4+7}{3},\frac{-8+6+0}{3}) = (2,-\frac{2}{3})$

ΔGAB 的面積 $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & -8\\-4 & 6\\2 & -\frac{2}{3}\\3 & -8\end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left|18+\frac{8}{3}-16-32-12+2\right|$

$= \frac{56}{3}$