「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

解幾 － 直線簇與圓簇

摘要

1. 直線簇的應用：
   (a) 斜率為 m 的平行直線簇　$y = mx + k$
   (b) 過定點 (a, b) 的直線簇　$y = k(x-a)+b$
   (c) 過兩直線交點的直線簇
   $$(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$$
2. 圓簇的應用：
   (a) 以 $C(a,b)$ 為圓心的同心圓簇：
   $(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$ 或 $x^2+y^2+Dx+Ey+k=0$
   (b) 過一定圓 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 與一直線 $Ax+By+C=0$ 的交點的圓簇：
   $(x^2+y^2+Dx+Ey+F)+k(Ax+By+C)=0$
   (c) 過兩定圓 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 及
   $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交點的圓簇：
   $(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$
   (d) 穿過三直線 $A_1x+B_1y+C_1=0$、
   $A_2x+B_2y+C_2=0$、
   $A_3x+B_3y+C_3=0$ 兩兩交點的曲線簇：
   $$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)$$
   $$+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)(A_3x+B_3y+C_3)$$
   $$+\mu(A_3x+B_3y+C_3)(A_1x+B_1y+C_1)=0$$
   若以圓的性質計算 λ,μ，
   可得以三直線為三邊的三角形的外接圓方程。

3. 根軸與根心：

(a) 根軸為引等長切線至兩定圓 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 及

$$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$$

的點的軌跡，兩圓根軸方程：

$$(x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1)-(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

即 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$

(b) 若兩圓相交於兩點，此直線亦為經過兩交點的公共弦，
和圓心連線互相垂直。且公共弦部分被圓心連線垂直平分。

(c) 若三圓圓心不共線，其兩兩圓的根軸共點，此點稱為根心。

4. 運用公共弦簡化，計算兩圓交點的坐標。

拾例

1. 求經過兩直線 $3x+4y+1=0$ 及 $5x-6y+3=0$ 的交點，且經過原點的直線的方程。

答： 設所求直線方程為 $3x+4y+1+k(5x-6y+3)=0$，
即 $(3+5k)x+(4-6k)y+(1+3k)=0$。
代 $x=y=0$ 入上式，
得
$$\begin{aligned} 1+3k &= 0 \\ k &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$
故所求直線方程為
$$\begin{aligned} 3x+4y+1-\frac{1}{3}(5x-6y+3) &= 0 \\ 3(3x+4y+1)-(5x-6y+3) &= 0 \\ 4x+18y &= 0 \\ 2x+9y &= 0 \end{aligned}$$

2. 求經過兩直線 $3x+4y+1=0$ 及 $5x-6y+3=0$ 的交點，且斜率為 1 的直線的方程。

答： 設所求直線方程為 $3x+4y+1+k(5x-6y+3)=0$，
即 $(3+5k)x+(4-6k)y+(1+3k)=0$。
故斜率為
$$\begin{aligned} -\frac{3+5k}{4-6k} &= 1 \\ 3+5k &= 6k-4 \\ k &= 7 \end{aligned}$$
故所求直線方程為
$$\begin{aligned} 3x+4y+1+7(5x-6y+3) &= 0 \\ 38x-38y+22 &= 0 \\ 19x-19y+11 &= 0 \end{aligned}$$

3. 一圓和 $x^2+y^2-20x-14y-2014=0$ 同心，且經過點 $(1,-3)$，求該圓方程。

答： 設圓方程為 $x^2+y^2-20x-14y+F=0$，
代 $(1,-3)$ 入圓，得 $1+9-20+42+F=0$，即 $F=-32$。
故該圓方程為 $x^2+y^2-20x-14y-32=0$。

4. 設以三直線 $y-5=0$、 $x+1=0$、 $x+y-6=0$ 為三邊構成的三角形，試求該三角形的外接圓方程。

答： 解法一：

$\begin{cases} y-5=0 \\ x+1=0 \end{cases}$，解出交點 $(-1,5)$，

$\begin{cases} x+1=0 \\ x+y-6=0 \end{cases}$，解出交點 $(-1,7)$，

$\begin{cases} x+y-6=0 \\ y-5=0 \end{cases}$，解出交點 $(1,5)$。

設所求的圓的方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，代三點，則有

$\begin{cases} 1+25-D+5E+F=0 \\ 1+49-D+7E+F=0 \\ 1+25+D+5E+F=0 \end{cases}$， 解得 $\begin{cases} D=0 \\ E=-12 \\ F=34 \end{cases}$

所以該圓方程為 $x^2+y^2-12y+34=0$。

解法二：

設所求的圓的方程為

$$\begin{aligned}
(y-5)(x+1)+\lambda(x+1)(x+y-6)+\mu(x+y-6)(y-5) &= 0 \\
(xy-5x+y-5)+\lambda(x^2+xy-5x+y-6) & \\
+\mu(xy+y^2-5x-11y+30) &= 0 \\
\lambda x^2+(1+\lambda+\mu)xy+\mu y^2 & \\
(-5-5\lambda-5\mu)x+(1+\lambda-11\mu)y & \\
+(-5-6\lambda+30\mu) &= 0
\end{aligned}$$

由圓的性質，可知 $\begin{cases} \lambda=\mu \\ 1+\lambda+\mu=0 \end{cases}$，即 $\lambda=\mu=-\dfrac{1}{2}$。

故所求的圓的方程為

$$\begin{aligned}
(y-5)(x+1)-\frac{1}{2}(x+1)(x+y-6)-\frac{1}{2}(x+y-6)(y-5) &= 0 \\
2(xy-5x+y-5)-(x^2+xy-5x+y-6) & \\
-(xy+y^2-5x-11y+30) &= 0 \\
-x^2-y^2+12y-34 &= 0 \\
x^2+y^2-12y+34 &= 0
\end{aligned}$$

5. 一圓過點（−6, 4），並且經過直線 $x+2y+3=0$ 與圓 $x^2+y^2+4x+2y-1=0$ 的交點。求此圓的方程。

答： 設該圓方程為 $x^2+y^2+4x+2y-1+k(x+2y+3)=0$。

代點（−6, 4）

$$\begin{aligned} 36+16-24+8-1+k(-6+8+3) &= 0 \\ 35+5k &= 0 \\ k &= -7 \end{aligned}$$

所以所求圓的方程為

$$\begin{aligned} x^2+y^2+4x+2y-1-7(x+2y+3) &= 0 \\ x^2+y^2-3x-12y-22 &= 0 \text{。} \end{aligned}$$

6. 求過兩圓 $C_1: x^2+y^2=10$ 及 $C_2: x^2+y^2-2x-2y-10=0$ 的交點且圓心的 x 坐標為 10 的圓的方程。

答： 設該圓方程為 $x^2+y^2-2x-2y-10+k(x^2+y^2-10)=0$

整理後得 $(1+k)x^2+(1+k)y^2-2x-2y+(-10-10k)=0$

即 $x^2+y^2-\frac{2}{1+k}x-\frac{2}{1+k}y-10=0$

故圓心在 $(\frac{1}{1+k},\frac{1}{1+k})$，

即得

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+k} &= 10 \\ 10+10k &= 1 \\ k &= -\frac{9}{10} \text{。} \end{aligned}$$

故所求的圓的方程為

$$\begin{aligned} x^2+y^2-2x-2y-10-\frac{9}{10}(x^2+y^2-10) &= 0 \\ 10(x^2+y^2-2x-2y-10)-9(x^2+y^2-10) &= 0 \\ x^2+y^2-20x-20y-10 &= 0 \end{aligned}$$

7. 求兩圓 $x^2+y^2+6x-4y=0$ 及 $x^2+y^2+4x+6y-8=0$ 的根軸。

答： 根軸方程為

$$\begin{aligned}
x^2+y^2+6x-4y-(x^2+y^2+4x+6y-8) &= 0\\
2x-10y+8 &= 0\\
x-5y+4 &= 0\text{。}
\end{aligned}$$

8. 求以兩圓 $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ 及 $x^2+y^2+10y=0$ 的公共弦為直徑的圓的方程。

答： 設所求的圓的方程為

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-4x+6y+8+k(x^2+y^2+10y) &= 0\\
(1+k)x^2+(1+k)y^2-4x+(6+10k)y+8 &= 0
\end{aligned}$$

故該圓圓心在 $(\frac{2}{1+k},-\frac{3+5k}{1+k})$ 。

另公共弦方程為

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2-4x+6y+8)-(x^2+y^2+10y) &= 0\\
-4x-4y+8 &= 0\\
x+y-2 &= 0
\end{aligned}$$

把圓心代入公共弦，得

$$\begin{aligned}
(\frac{2}{1+k})+(-\frac{3+5k}{1+k})-2 &= 0\\
2-(3+5k)-2(1+k) &= 0\\
2-5k-3-2-2k &= 0\\
-7k &= 3\\
\mathrm{k} &= -\frac{3}{7}
\end{aligned}$$

所以所求的圓的方程為

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-4x+6y+8-\frac{3}{7}(x^2+y^2+10y) &= 0\\
7(x^2+y^2-4x+6y+8)-3(x^2+y^2+10y) &= 0\\
4x^2+4y^2-28x+12y+56 &= 0\\
x^2+y^2-7x+3y+14 &= 0\text{。}
\end{aligned}$$

9. 求穿過圓 $C: x^2+y^2-8y+4=0$ 及直線 $L: 2x+3=0$ 的交點且切於 x 軸的圓的方程。

答： 所求的圓的方程為

$$x^2+y^2-8y+4+k(2x+3) = 0$$
$$x^2+y^2+2kx-8y+(4+3k) = 0$$

故該圓圓心在 $(-k,4)$ 。

半徑為 $\sqrt{(-k)^2+4^2-(4+3k)} = \sqrt{k^2-3k+12}$

由於圓切於 x 軸，

故 $\sqrt{k^2-3k+12} = 4$

$$k^2-3k+12 = 16$$
$$k^2-3k-4 = 0$$
$$(k-4)(k+1) = 0$$

所以解得 $k=4$ 或 $k=-1$，

即所求的圓的方程為 $x^2+y^2-8y+4+4(2x+3)=0$

$x^2+y^2+8x-8y+16=0$ 。

或 $x^2+y^2-8y+4-(2x+3)=0$

$x^2+y^2-2x-8y+1=0$ 。

10.. 設兩圓，圓心分別在(−2, 2) 和原點，半徑分別為 4 和 $2\sqrt{2}$ 。若兩圓相交於 P、Q 兩點，求 PQ。

答： 兩圓方程分別為

$x^2+y^2-8=0$ 及 $(x+2)^2+(y-2)^2 = 16$

$$x^2+4x+4+y^2-4y+4 = 16$$
$$x^2+y^2+4x-4y-8 = 0$$

兩圓公共弦方程為 $x^2+y^2+4x-4y-8-(x^2+y^2-8) = 0$

$$4x-4y = 0$$
$$x-y = 0$$

代 $y=x$ 入第一圓，得

$$x^2+x^2-8 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

對應 $y = \pm 2$

故兩交點為 P(2, 2) 及 Q(−2, −2)。 PQ $= \sqrt{(2+2)^2+(2+2)^2}$

$= 4\sqrt{2}$ 。

淺問

1. 求穿過 $L_1: x+2y-3=0$ 及 $L_2: 4x-5y+6=0$ 的交點且斜率為 -1 的直線的方程。

2. 求穿過 $L_1: 9x-8y+7=0$ 及 $L_2: y=-6x-5$ 的交點及原點的直線方程。

3. 某圓和 $x^2+y^2-9x+8y-9=0$ 同一圓心且經過點（6, 4），求該圓方程。

4. 求和圓 $x^2+y^2+4x-10y+9=0$ 同心，且切於 x 軸，求該圓方程。

5. 求和圓 $x^2+y^2=13$ 相切於點（−2, −3）且經過點（−7, −8）的圓的方程。

6. 求過兩定圓 $x^2+y^2=3$ 及 $(x-6)^2+y^2=36$ 且半徑為 $\sqrt{6}$ 的圓的方程。

7. 求經過直線 $x=-2$ 與已知圓 $x^2+y^2+2x-4y-11=0$ 的交點的所有圓中，具有面積最小的圓的方程。

8. 設兩圓為 $x^2+y^2+2x-3y-9=0$ 和 $x^2+y^2-2x+5y=0$。試求過兩圓交點且切於 x 軸的圓的方程。

9. 求以 $L_1: x-6=0$、$L_2: x+2y=0$、$L_3: x-2y-8=0$ 為三邊的三角形的外接圓方程。

10. 求兩圓 $(x-2)^2+y^2=1$、 $x^2+(y-2)^2=2$ 的根軸方程。

11. 由一點 $P(x,y)$ 引切線至兩圓 $(x+1)^2+(y-3)^2=2^2$ 及 $(x-4)^2+(y+1)^2=3^2$ ，若兩切線長度相等，求 P 點軌跡。

12. 求三圓 $C_1: x^2+y^2+4x+7=0$、$C_2: x^2+y^2+3x+y+6=0$、$C_3: x^2+y^2+y=0$ 的根心坐標。

13. 求兩圓 $C_1: x^2+y^2+2x-60=0$, $C_2: x^2+y^2-2y-60=0$ 的兩交點的距離。

14. 從（3, 1）向圓 $x^2+y^2=5$ 作兩條切線，求切點坐標。

詳答

1. 設該直線方程為 $(x+2y-3)+k(4x-5y+6)=0$

即 $(1+4k)x+(2-5k)y+(-3+6k)=0$

$$y=-\frac{1+4k}{-3+6k}x-\frac{2-5k}{-3+6k}$$

故斜率為 $-\frac{1+4k}{-3+6k}$ 。

$$-\frac{1+4k}{-3+6k} = -1$$
$$1+4k = -3+6k$$
$$k = 2$$

所以該直線方程為 $[1+4(2)]x+[2-5(2)]y+[-3+6(2)]=0$

即 $9x-8y+9=0$ 。

2. 該直線方程為 $(9x-8y+7)+k(6x+y+5)=0$

代（0, 0)入直線， $7+5k=0$ ，即 $k=-\frac{7}{5}$ 。

所以所求的直線方程為

$$(9x-8y+7)-\frac{7}{5}(6x+y+5) = 0$$
$$5(9x+8y+7)-7(6x+y+5) = 0$$
$$3x+33y = 0$$
$$x+11y = 0$$

3. 設所求的圓的方程為 $x^2+y^2-9x+8y+F=0$，

代點（6, 4）入圓 $(6)^2+(4)^2-9(6)+8(4)+F = 0$

$$30+F = 0$$
$$F = -30$$

所以所求的圓的方程為 $x^2+y^2-9x+8y-30=0$ 。

4. 設圓方程為 $x^2+y^2+4x-10y+F=0$，

由於切於 x 軸，故代 $y=0$，後得一解。

即 $x^2+4x+F=0$ 的判別式為 0。

$$\Delta = (4)^2-4(1)(F) = 0$$
$$F = 4$$

故該圓方程為 $x^2+y^2+4x-10y+4=0$ 。

5. 作以切點為圓心的點圓：

$$(x+2)^2+(y+3)^2 = 0$$
$$x^2+4x+4+y^2+6y+9 = 0$$
$$x^2+y^2+4x+6y+13 = 0$$

設所求的圓的方程為

$$x^2+y^2+4x+6y+13+k(x^2+y^2-13) = 0$$

代點（−7, −8）入圓，得

$$(49+64-28-48+13)+k(49+64-13) = 0$$
$$50+100k = 0$$
$$k = -\frac{1}{2}$$

故所求的圓的方程為

$$(x^2+y^2+4x+6y+13)-\frac{1}{2}(x^2+y^2-13) = 0$$
$$2(x^2+y^2+4x+6y+13)-(x^2+y^2-13) = 0$$
$$x^2+y^2+8x+12y+39 = 0\text{。}$$

6. 設該圓方程為 $(x-6)^2+y^2-36+k(x^2+y^2-3) = 0$

即 $x^2-12x+36+y^2-36+kx^2+ky^2-3k$

$$= 0$$
$$(1+k)x^2+(1+k)y^2-12x-3k = 0$$
$$x^2+y^2-\frac{12}{1+k}x-\frac{3k}{1+k} = 0$$

該圓半徑為 $\frac{1}{2}\sqrt{(-\frac{12}{1+k})^2+0^2-4(-\frac{3k}{1+k})} = \sqrt{6}$

$$\frac{144}{(1+k)^2}+\frac{12k}{1+k} = 24$$
$$144+12k(1+k) = 24(1+k)^2$$
$$144+12k+12k^2-24-48k-24k^2 = 0$$
$$-12k^2-36k+120 = 0$$
$$k^2+3k-10 = 0$$

解得 $k=-5$ 或 $k=2$ 。

所以所求的圓有二：

當 $k=-5$ ，$(1-5)x^2+(1-5)y^2-12x-3(-5)=0$ ，

即 $4x^2+4y^2+12x-15=0$ ；

當 $k=2$ ，$(1+2)x^2+(1+2)y^2-12x-3(2)=0$ ，

即 $x^2+y^2-4x-2=0$ 。

7. 設所求圓方程為 $x^2+y^2+2x-4y-11+k(x+2)=0$

$$x^2+y^2+(k+2)x-4y+(2k-11)=0$$

半徑為 $\frac{1}{2}\sqrt{(k+2)^2+16-4(2k-11)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4k+4+16-8k+44}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4k+64}=\frac{1}{2}\sqrt{(k-2)^2+60}$

面積最小，即半徑最小，即取 $k=2$，

所求圓的方程為 $x^2+y^2+4x-4y-7=0$。

8. 設所求的圓的方程為

$$x^2+y^2+2x-3y-9+k(x^2+y^2-2x+5y)=0$$

$$(1+k)x^2+(1+k)y^2+(2-2k)x+(-3+5k)y-9=0$$

因為切於 x 軸，故代 $y=0$，得一解。

$$(1+k)x^2+(2-2k)x-9=0$$

上式的 $\Delta=0$，即

$$(2-2k)^2-4(1+k)(-9)=0$$

$$4-8k+4k^2+36+36k=0$$

$$4k^2+28k+40=0$$

$$k^2+7k+10=0$$

解得 $k=-2$ 或 $k=-5$。

故所求的圓的方程有二：

當 $k=-2$， $(1-2)x^2+(1-2)y^2+(2+4)x+(-3-10)y-9=0$

$$-x^2-y^2+6x-13y-9=0$$

$$x^2+y^2-6x+13y+9=0$$

當 $k=-5$， $(1-5)x^2+(1-5)y^2+(2+10)x+(-3-25)y-9=0$

$$-4x^2-4y^2+12x-28y-9=0$$

$$4x^2+4y^2-12x+28y+9=0$$

9. 解法一：

先求出三角形的三個頂點。

$\begin{cases} x-6=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$，解得（6, −3）。

$\begin{cases} x+2y=0 \\ x-2y-8=0 \end{cases}$，解得（4, −2）。

$\begin{cases} x-2y-8=0 \\ x-6=0 \end{cases}$，解得（6, −1）。

再設圓方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

故有 $\begin{cases} 36+9+6D-3E+F=0 \\ 16+4+4D-2E+F=0 \\ 36+1+6D-E+F=0 \end{cases}$，

兩兩式相減，得

$\begin{cases} 25+2D-E=0 \\ 17+2D+E=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} D=-\dfrac{21}{2} \\ E=4 \end{cases}$，進而得 $F=30$。

即所求的圓的方程為 $x^2+y^2-\dfrac{21}{2}x+4y+30=0$，

$2x^2+2y^2-21x+8y+60=0$。

解法二：

設所求的圓的方程為

$$\begin{aligned}
(x-6)(x+2y)+\lambda(x+2y)(x-2y-8) & \\
+\mu(x-2y-8)(x-6) &= 0 \\
x^2+2xy-6x-12y+\lambda(x^2-4y^2-8x-16y) & \\
+\mu(x^2-2xy-14x+12y+48) &= 0 \\
(1+\lambda+\mu)x^2+(2-2\mu)xy-4\lambda y^2+(-6-8\lambda-14\mu)x & \\
+(-12-16\lambda+12\mu)y+48 &= 0
\end{aligned}$$

由圓的性質，可得 $\begin{cases} 2-2\mu=0 \\ 1+\lambda+\mu=-4\lambda \end{cases}$，即 $\begin{cases} \mu=1 \\ \lambda=-\dfrac{2}{5} \end{cases}$。

故圓的方程為

$$\begin{aligned}
(x^2+2xy-6x-12y)-\frac{2}{5}(x^2-4y^2-8x-16y) & \\
+(x^2-2xy-14x+12y+48) &= 0 \\
5(x^2+2xy-6x-12y)-2(x^2-4y^2-8x-16y) & \\
+5(x^2-2xy-14x+12y+48) &= 0 \\
8x^2+8y^2-84x+32y+240 &= 0 \\
2x^2+2y^2-21x+8y+60 &= 0
\end{aligned}$$

10. 兩圓方程可改寫成 $(x-2)^2+y^2 = 1$

$$x^2+y^2-4x+3 = 0$$

及 $x^2+(y-2)^2 = 2$

$$x^2+y^2-4y+2 = 0$$

故根軸方程為 $x^2+y^2-4x+3-(x^2+y^2-4y+2) = 0$

$$-4x+4y+1 = 0$$

$$4x-4y-1 = 0$$

11. 兩圓方程可改寫成 $(x+1)^2+(y-3)^2=2^2$

$$x^2+2x+1+y^2-6y+9-4 = 0$$

$$x^2+y^2+2x-6y+6 = 0$$

$$(x-4)^2+(y+1)^2=3^2$$

$$x^2-8x+16+y^2+2y+1-9 = 0$$

$$x^2+y^2-8x+2y+8 = 0$$

所求軌跡，即兩圓根軸，方程為

$$x^2+y^2+2x-6y+6-(x^2+y^2-8x+2y+8) = 0$$

$$10x-8y-2 = 0$$

$$5x-y-1 = 0$$

12. 由 C_1,C_2 所成的根軸為 $x^2+y^2+4x+7-(x^2+y^2+3x+y+6) = 0$

$$x-y+1 = 0$$

由 C_1,C_3 所成的根軸為 $x^2+y^2+4x+7-(x^2+y^2+y) = 0$

$$4x-y+7 = 0$$

$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 4x-y+7=0 \end{cases}$，解得 $x=-2, y=-1$，故根心坐標為 (−2, −1)。

13. 由於半徑之差 < 兩圓心距離 < 半徑之和，故兩圓相交於兩點。

公共弦方程： $(x^2+y^2+2x-60)-(x^2+y^2-2y-60)=0$

$$2x+2y=0$$

$$x+y=0$$

由於 $y=-x$，代入 C_1，得 $x^2+x^2+2x-60=0$

$$x^2+x-30=0$$

$$(x-5)(x+6)=0$$

即 $x=5$ 或 $x=-6$

故兩點坐標為 $(5,-5)$ 或 $(-6,6)$。

即兩點距離為 $\sqrt{(5+6)^2+(-5-6)^2} = 11\sqrt{2}$。

14. 定圓圓心在原點。

定圓圓心、(3, 1) 和兩個切點共圓，

是以原點和 (3, 1) 為直徑兩端點的圓。

該圓方程為 $(x-0)(x-3)+(y-0)(y-1) = 0$

$x^2+y^2-3x-y = 0$

兩圓公共弦方程為 $x^2+y^2-3x-y-(x^2+y^2-5) = 0$

$3x+y-5 = 0$

代 $y=-3x+5$ 入定圓，得 $x^2+(-3x+5)^2-5 = 0$

$x^2+9x^2-30x+25-5 = 0$

$10x^2-30x+20 = 0$

$x^2-3x+2 = 0$

解得 $x=1$ 或 $x=2$，對應 $y=2$ 或 $y=-1$。

故切點坐標為 (1, 2) 及 (2, −1)。

你知道我們成爲數學家的原因都一樣：我們懶。

You know we all became mathematicians for the same reason: we are lazy.

美國數學家

胡辛利捷

(Maxwell Alexander Rosenlicht 1924-1999)