「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

解幾 － 參數方程與極坐標

摘要

1. 普通方程及參數方程的轉化。
2. 直線、圓、橢圓、雙曲線、拋物線等的參數方程：
   (a) 直線 － 一次參數方程
   (b) 圓 － $\begin{cases} x = x_0 + r\cos t \\ y = y_0 + r\sin t \end{cases}$
   (c) 橢圓 － $\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\sin t \end{cases}$
   (d) 雙曲線－ $\begin{cases} x = x_0 + a\tan t \\ y = y_0 + b\sec t \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = x_0 + a\sec t \\ y = y_0 + b\tan t \end{cases}$
   (e) 拋物線－ $\begin{cases} x = x_0 + 2pt^2 \\ y = y_0 + 2pt \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = x_0 + 2pt \\ y = y_0 + 2pt^2 \end{cases}$
3. 運用參數方程解決軌跡問題。
4. 極坐標與直角坐標之間的互換：
   (a) $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\dfrac{y}{x}) \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$
5. 運用餘弦定理計算極坐標中兩點的距離。

拾例

1. 試把 $(4,270°)$ 化成直角坐標。

答： $\begin{cases} x = 4\cos 270° \\ y = 4\sin 270° \end{cases}$ ， $\begin{cases} x = 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = 4\times(-\dfrac{1}{2}) \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = -2 \end{cases}$ 。

2. 試把 $\begin{cases} x = \dfrac{2-3t}{1+t} \\ y = \dfrac{1+4t}{1+t} \end{cases}$ 轉為普通方程。

答： $\begin{cases} x = \dfrac{5}{1+t} - 3 \\ y = 4 - \dfrac{3}{1+t} \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} x+3 = \dfrac{5}{1+t} \\ 4-y = \dfrac{3}{1+t} \end{cases}$ ， $3(x+3)-5(4-y)=0$

所以 $3x+5y=11$，其中 $x \neq -3$ 。

3. 試把 $\begin{cases} x = \sqrt{\sin t} \\ y = 2\cos t \end{cases}$ 轉為普通方程。

答： $\begin{cases} \sin t = x^2 \\ \cos t = \dfrac{y}{2} \end{cases}$ ，由於 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$，所以 $x^4 + \dfrac{y^2}{4} = 1$，

即 $4x^4 + y^2 - 4 = 0$ 。

4. 試把 $\begin{cases} x = 1+\cos^2 t \\ y = \sin^2 t - \sin^4 t \end{cases}$ 轉為普通方程。

答： y = $\sin^2 t(1-\sin^2 t)$ = $\cos^2 t(1-\cos^2 t)$

所以 $\cos^2 t = x-1$，

即 y = $(x-1)(1-x+1)$ = $-x^2+x-2$（其中 $1 \le x \le 2$）

5. 求直線 $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=t \end{cases}$ 被 $x^2+y^2=5$ 所截得的弦長。

答： 該直線方程為 $x=-3+2y$，代入圓方程，得

$$\begin{aligned}(-3+2y)^2+y^2 &= 5\\ 9-12y+4y^2+y^2 &= 5\\ 5y^2-12y+4 &= 0\end{aligned}$$

若兩交點坐標分別為 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，

則 $\begin{cases} y_1+y_2=\dfrac{12}{5} \\ y_1y_2=\dfrac{4}{5} \end{cases}$。

$$\begin{aligned}\text{弦長} &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\ &= \sqrt{(2y_1-3-2y_2+3)^2+(y_1-y_2)^2}\\ &= \sqrt{(2y_1-2y_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{5(y_1-y_2)^2}\\ &= \sqrt{5(y_1+y_2)^2-20y_1y_2}\\ &= \sqrt{5(\frac{12}{5})^2-20(\frac{4}{5})} = \sqrt{\frac{144}{5}-16}\\ &= \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}\text{。}\end{aligned}$$

6. 試以參數方程表示直線 $3x+4y-5=0$。

答： 所求的方程為 $\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{5-3t}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4t-5 \\ y=5-3t \end{cases}$

7. 試以參數方程表示一圓心在 $(3,-4)$，半徑為 5 的圓的方程。

答： 所求的方程為 $\begin{cases} x=3+5\cos t \\ y=-4+5\sin t \end{cases}$。

8. 若 $A(3,30°),B(4,210°)$，求 AB。

答： AB = $3+4$ = 7。

9.　若 $A(3,150°), B(4,210°)$，求 AB。

答：AB $= \sqrt{3^2+4^2-2(3)(4)\cos 60°} = \sqrt{3^2+4^2-2(3)(4)(\frac{1}{2})}$

$= \sqrt{13}$。

10.　已知 $A(3,30°), B(4,180°), C(5,330°)$，求 ΔABC 的面積。

答：由於原點在三角形內，

ΔAOB 的面積 $= \frac{1}{2}(3)(4)\sin(180°-30°)$

$= \frac{1}{2}(3)(4)\sin 150° = 3$

ΔBOC 的面積 $= \frac{1}{2}(4)(5)\sin(330°-180°)$

$= \frac{1}{2}(4)(5)\sin 150° = 5$

ΔCOA 的面積 $= \frac{1}{2}(5)(3)\sin(30°+30°)$

$= \frac{1}{2}(5)(3)\sin 60° = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

故總面積為 $= 3+5+\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{32+15\sqrt{3}}{4}$

在我看來，一個人如果要在數學上有所進步，他必須向大師們學習，而不應向徒弟們學習。

挪威數學家

阿貝爾

(Niels Henrik Abel 1802-1829)

淺問

1. 試把下列普通方程轉為參數方程：

(a) $y=4x+23$ (b) $(x-1)^2+(y+3)^2=100$

(c) $4x^2-9y^2=1$ (d) $y^2=20x$

2. 試把下列參數方程轉為普通方程：

(a) $\begin{cases} x=4t-1 \\ y=3+2t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x=\cos t-3 \\ y=2\sin t \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x=\sec t+4 \\ y=\tan t-4 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x=t+\frac{1}{t} \\ y=t-\frac{1}{t} \end{cases}$

3. 求雙曲線 $\begin{cases} x=2\sqrt{3}\tan t \\ y=3\sqrt{2}\sec t \end{cases}$ 的焦點和漸近線方程。

4. 若曲線 C 的參數方程是 $\begin{cases} x=2\cos a \\ y=2\sin a \end{cases}$， $-\frac{\pi}{4}\le a\le\frac{2\pi}{3}$，求曲線的長度。

5. 試把 $(x,y)=(\frac{\cos t}{1+\cos t},\frac{\sin t}{1+\cos t})$ 轉為普通方程。

6. 試把下列直角坐標轉換為極坐標：

(a) （10, 10） (b) $(2,-\sqrt{2})$

(c) （-7, 0） (d) $(-\sqrt{3},-1)$

7. 試把下列極坐標轉換為直角坐標：

(a) $(3,60°)$ (b) $(4,150°)$

(c) $(5,270°)$ (d) $(6,345°)$

8. 試求下列兩點的距離：

(a) $(1,30°)$ 和 $(8,210°)$ (b) $(2,60°)$ 和 $(7,120°)$

(c) $(3,90°)$ 和 $(6,330°)$ (d) $(4,225°)$ 和 $(5,225°)$

9. 已知 $A(3,30°),B(6,60°),C(9,90°)$，求 ΔABC 的面積。

詳答

1. (a) $y=4x+23$，$\begin{cases} x=t \\ y=4t+23 \end{cases}$。

(b) $(x-1)^2+(y+3)^2=100$，$\begin{cases} x-1=10\cos t \\ y+3=10\sin t \end{cases}$，$\begin{cases} x=10\cos t+1 \\ y=10\sin t-3 \end{cases}$。

(c) $4x^2-9y^2=1$，$\begin{cases} 2x=\sec t \\ 3y=\tan t \end{cases}$，$\begin{cases} x=\dfrac{\sec t}{2} \\ y=\dfrac{\tan t}{3} \end{cases}$。

(d) $y^2=20x$，$\begin{cases} x=5t^2 \\ y=10t \end{cases}$。

2. (a) $\begin{cases} x=4t-1 \\ y=3+2t \end{cases}$

t = $\dfrac{y-3}{2}$，x = $4(\dfrac{y-3}{2})-1$ = $2y-7$

所以 $x-2y+7=0$。

(b) $\begin{cases} x=\cos t-3 \\ y=2\sin t \end{cases}$

$$(x+3)^2+(\frac{y}{2})^2 = 1$$

$$x^2+6x+9+\frac{y^2}{4} = 1$$

$$4x^2+y^2+24x+32 = 0$$

(c) $\begin{cases} x=\sec t+4 \\ y=\tan t-4 \end{cases}$

$$(x-4)^2-(y+4)^2 = 1$$

$$x^2-8x+16-y^2-8y-16 = 1$$

$$x^2-y^2-8x-8y-1 = 0$$

(d) $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$，$\begin{cases} x+y=2t \\ x-y=\dfrac{2}{t} \end{cases}$

$$(x+y)(x-y) = 4$$

$$x^2-y^2-4 = 0$$

3. $\begin{cases} x = 2\sqrt{3}\tan t \\ y = 3\sqrt{2}\sec t \end{cases}$，

$$(\frac{y}{3\sqrt{2}})^2 - (\frac{x}{2\sqrt{3}})^2 = 1$$

$$\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{12} = 1$$

所以，它的焦點坐標為 $(0,\sqrt{18+12})$ 或 $(0,-\sqrt{18+12})$，

即（0, 30）或（0, -30）。

漸近線方程為 $y = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}x$，即 $y = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$。

4. 曲線 C 的普通方程為 $x^2 + y^2 = 4$，即半徑為 2 的圓弧。

圓心角為 $\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{11\pi}{12}$，所以弧長 $= 2\times\frac{11\pi}{12} = \frac{11\pi}{6}$。

5. $\cos t = \frac{x}{1-x}$，我們有 $x^2 + y^2 = \frac{1}{(1+\cos t)^2}$，

即
$$(1+\frac{x}{1-x})^2(x^2+y^2) = 1$$

$$\frac{x^2+y^2}{(1-x)^2} = 1$$

$$x^2+y^2 = 1-2x+x^2$$

$$y^2 = 1-2x$$

6. (a) $\begin{cases} r = \sqrt{10^2+10^2} = 2\sqrt{10} \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{10}{10}) = 45^\circ \end{cases}$，所以該點坐標為 $(2\sqrt{10},45^\circ)$。

(b) $\begin{cases} r = \sqrt{2^2+(-\sqrt{2})^2} = \sqrt{6} \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{-\sqrt{2}}{2}) = 135^\circ \end{cases}$，所以該點坐標為 $(\sqrt{6},135^\circ)$。

(c) $\begin{cases} r = \sqrt{(-7)^2+0^2} = 7 \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{0}{-7}) = 180^\circ \end{cases}$，所以該點坐標為 $(7,180^\circ)$。

(d) $\begin{cases} r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2 \\ \theta = \tan^{-1}(\frac{-1}{-\sqrt{3}}) = 330^\circ \end{cases}$，所以該點坐標為 $(2,330^\circ)$。

7. (a) $\begin{cases} x = 3\cos 60° = \dfrac{3}{2} \\ y = 3\sin 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$， 所以所以該點坐標為 $(\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2})$。

(b) $\begin{cases} x = 4\cos 150° = -2\sqrt{3} \\ y = 4\sin 150° = 6 \end{cases}$， 所以所以該點坐標為 $(-2\sqrt{3},6)$。

(c) $\begin{cases} x = 5\cos 270° = 0 \\ y = 5\sin 270° = -5 \end{cases}$， 所以所以該點坐標為 $(0,-5)$。

(d) $\begin{cases} x = 6\cos 345° = 3\sqrt{2} \\ y = 6\sin 345° = -3\sqrt{2} \end{cases}$， 所以所以該點坐標為 $(3\sqrt{2},-3\sqrt{2})$。

8. (a) 距離 $= 1+8 = 9$

(b) 距離 $= \sqrt{2^2+7^2-2(2)(7)\cos(120°-60°)}$

$= \sqrt{4+49-28\cos 60°} = \sqrt{4+49-14}$

$= \sqrt{39}$

(c) 距離 $= \sqrt{3^2+6^2-2(3)(6)\cos(330°-90°-180°)}$

$= \sqrt{9+36-36\cos 60°} = \sqrt{9+36-18}$

$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

(d) 距離 $= 5-4 = 1$

9. 由於原點不在三角形內，

ΔAOB 的面積 $= \dfrac{1}{2}(3)(6)\sin(60°-30°)$

$= \dfrac{1}{2}(3)(6)\sin 30° = \dfrac{9}{2}$

ΔBOC 的面積 $= \dfrac{1}{2}(6)(9)\sin(90°-60°)$

$= \dfrac{1}{2}(6)(9)\sin 30° = \dfrac{27}{2}$

ΔCOA 的面積 $= \dfrac{1}{2}(9)(3)\sin(90°-30°)$

$= \dfrac{1}{2}(9)(3)\sin 60° = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$

故總面積為 $= \dfrac{9}{2}+\dfrac{27}{2}-\dfrac{27\sqrt{3}}{4} = \dfrac{72-27\sqrt{3}}{4}$