# 「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

# 幾何 －三角形與畢氏定理

## 摘要

1. 運用和三角形相關的幾何定理解決問題。
2. 同高三角形與相似三角形：
   (a) 認識同高三角形的面積之比等於底長之比。
   (b) 認識相似三角形的面積之比等於底長之比的平方。
3. 運用三角形五心的幾何性質解題：
   (a) 三角形的三條中線交點 － 重心
   (b) 三角形的三條垂線交點 － 垂心
   (c) 三角形的三條內角平分線交點 － 內心
   (d) 三角形的三條垂直平分線交點 － 外心
   (e) 三角形的一條內角平分線和另外兩條外角平分線的交點 － 旁心
4. 運用畢達哥拉斯（Pythagoras）定理解決幾何題。

# 拾例

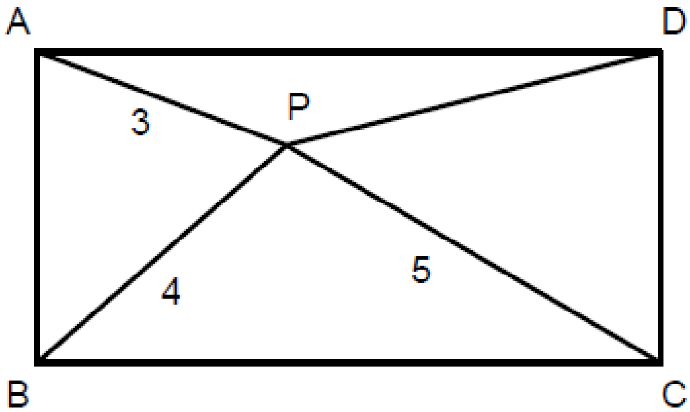
1. 若三角形的三個外角之比為 2:3:4，求這個三角形的最大內角。(中國河南省初二數學競賽 2003)

答： 由於外角和為 $360°$，

故最小外角為 $= 360° \times \dfrac{2}{2+3+4} = 80°$。

即最大內角為 $= 180° - 80° = 100°$。

2. 如右圖， P 為長方形中的一點使 $PA = 3, PB = 4, PC = 5$。求 PD。 (SAMO-S 2009)




答： 設 P 點至 AB, BC, CD, DA 的四線的垂直距離分別為 $a, b, c, d$。

$a^2 + b^2 = 16$，

$b^2 + c^2 = 25$，

$c^2 + d^2 = PD^2$

$d^2 + a^2 = 9$。

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$= 16 + PD^2$

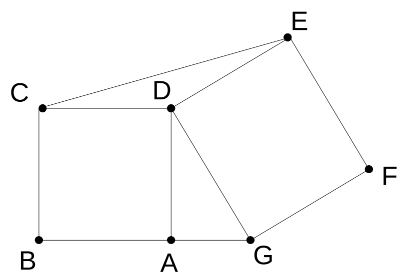
$= 25 + 9$

$PD^2 = 18$

PD $= 3\sqrt{2}$

3. 右圖中，A 在線段 BG 上，ABCD 和 DEFG 都 是正方形，面積分別為 $7cm^2$ 和 $11cm^2$，求三角形 CDE 的面積。

(中國北京市中學生數學競賽 2002 初二複賽)




答： $AD=\sqrt{7}$， $AG=\sqrt{11-7}=\sqrt{4}=2$。

$\Delta ADG$ 面積 $=\dfrac{AD\times AG}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{7}\times 2}{2}=\sqrt{7}$。

另外 $\angle CDE$

$=360^\circ-\angle CDA-\angle ADG-\angle GDE$

$=360^\circ-90^\circ-\angle ADG-90^\circ$

$=180^\circ-\angle ADG$

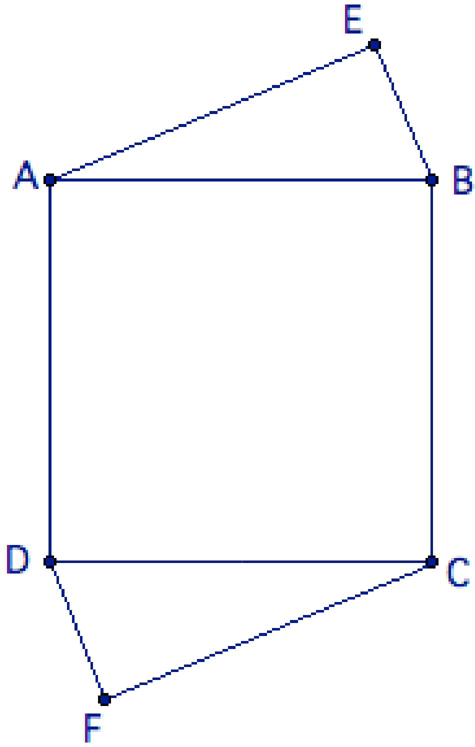
$\Delta CDE$ 面積 $=\dfrac{1}{2}(CD)(DE)\sin\angle CDE$

$=\dfrac{1}{2}(AD)(DG)\sin(180^\circ-\angle CDE)$

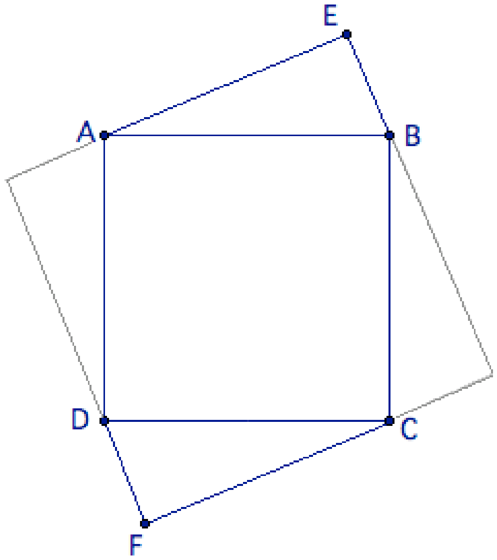
$=\dfrac{1}{2}(AD)(DG)\sin\angle ADG$

$=\Delta ADG$ 面積 $=\sqrt{7}$。

4.　如右圖， ABCD 為一正方形，邊長為 10。 E, F 為正方形外的兩點，使 $BE = DF = 6$ 及 $AE = CF = 8$。求 $EF^2$。




答：




如上圖，作兩全等三角形，使之成為一個大正方形。

大正方形的邊長為 $6+8=14$。

$EF^2 = 14^2 + 14^2 = 392$。

5.　P 點在一等邊三角形 ABC 內，Q, R, S 三點分別為 P 至 AB, BC, CA 三線的垂足。若 PQ = 1, PR = 3, PS = 5，求 AB。

答：　$\Delta ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2} \times AB^2 \times \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2$。

連線 PA, PB, PC，且把 $\Delta ABC$ 分割成三個小三角形。

$\Delta ABC$ 的面積 = 三小三角形面積之和

$$\frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{AB \times (1+3+5)}{2}$$

$$AB = \frac{9 \times 4}{2\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$ 。

6. 等腰三角形腰上的中線把它的周長分為 9cm 和 24cm 兩部分。求該三角形的底邊長度。（中國湖北省荊沙市初二數學競賽 1996）

答： 設等腰三角形的底和腰分別長 $x, y$ cm。

情況一：

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+x=9 \\ \frac{x}{2}+y=24 \end{cases}$$，解得 $x=6, y=21$。

但由於 $y>2x$，故不符合三角形不等式。此情況不可能。

情況二：

$$\begin{cases} \frac{x}{2}+x=24 \\ \frac{x}{2}+y=9 \end{cases}$$，解得 $x=8, y=5$。此情況符合三角形不等式。

故底邊長 5cm。

7. I 和 J 分別為 $\Delta ABC$ 的內心和垂心。若 $\angle A=70^\circ$，求 $\angle BIC$ 和 $\angle BJC$。

答： 連線 IB 及 IC。

由於 I 為內心，所以 IB 和 IC 分別為 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的角平分線。

$\angle B+\angle C = 180^\circ-70^\circ = 110^\circ$。

在 $\Delta BIC$ 中，

$\angle BCI+\angle CBI = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$

所以 $\angle BIC = 180^\circ-55^\circ = 125^\circ$。

連線 BJP 及 CJQ，使 P 和 Q 分別在 AC 和 AB 上。

由於 J 為垂心，所以 $\angle BPC=\angle CQB=90^\circ$。

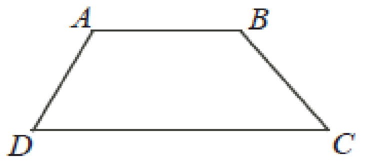
$\angle A+\angle BPC+\angle CQB+\angle PJQ = 360^\circ$

$70^\circ+90^\circ+90^\circ+\angle PJQ = 360^\circ$

$\angle PJQ = 110^\circ$

所以 $\angle BIC = \angle PJQ = 110^\circ$

8. 如右圖，梯形 ABCD 的平行邊 AB 及 CD 分別長 20 和 40，及 AD 和 BC 分別長 3 和 4。求梯形面積。




答： 延線 AD 及 BC，使之相交於 P。

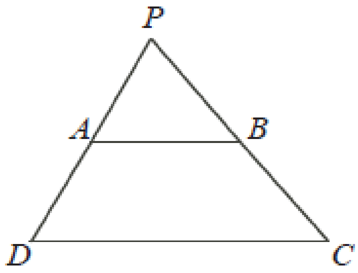
由於 $AB // DC$ ，使 $\Delta PAB \sim \Delta PDC$ 。

由於 $AB = \frac{1}{2}AD$ ，

所以 $PA = AD, PB = BC$ 。

即 $PD = 6, PC = 8$ 。

由畢氏定理逆定理，可知 $\angle P = 90°$ 。




所以 $\Delta PDC$ 面積 = $\frac{1}{2} \times 6 \times 8$

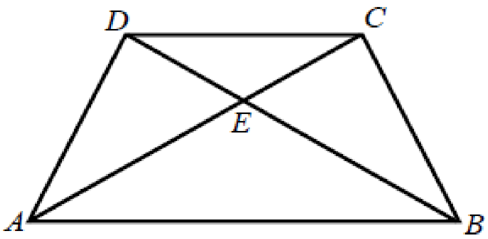
= $24$

另 $\Delta PAB$ 面積 = $\frac{1}{2} \times 3 \times 4$

= $6$

梯形面積 = $24 - 6$ = $18$。

9. 右圖，ABCD 是一梯形，其中 AB//CD 及 $\Delta DCE$ 的面積：$\Delta DCB$ 的面積 = 1:3。求 $\Delta DEC$ 的面積：$\Delta ABD$ 的面積。（HKMO 1996/97 初賽團體）




答： 因 $\Delta DCE$ 的面積：$\Delta DCB$ 的面積 = 1:3，

所以 $DE : EB = 1:3$

因 $\Delta DCE \sim \Delta BAE$ ，

所以 $\frac{DE}{EB} = \frac{CE}{EA} = \frac{1}{3}$

即 $\Delta DAE$ 的面積 = $3 \times \Delta DCE$ 的面積

而 $\Delta BAE$ 的面積 = $9 \times \Delta DCE$ 的面積

所以所求比例 = $1:12$ 。

10.　在三角形 ABC 的三邊 BC、CA、AB 上，分別取點 X、Y、Z 使得 $BX=4XC$，$CY=2YA$，$AZ=3ZB$。求 $\dfrac{S_{\Delta XYZ}}{S_{\Delta ABC}}$ 的值。

答：　解法一：

$$\frac{S_{\Delta BZX}}{S_{\Delta BZC}}=\frac{BX}{BC}=\frac{4}{1+4}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{S_{\Delta CZB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{ZB}{AB}=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$$

所以 $\dfrac{S_{\Delta BZX}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$。

同理 $\dfrac{S_{\Delta CXY}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{2}{15}$。

而 $\dfrac{S_{\Delta AYZ}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$。

由此 $\dfrac{S_{\Delta XYZ}}{S_{\Delta ABC}}=1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$。

解法二：

$$\frac{S_{\Delta BZX}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}(ZB)(BX)\sin\angle ZBX}{\frac{1}{2}(AB)(BC)\sin\angle ABC}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\text{。}$$

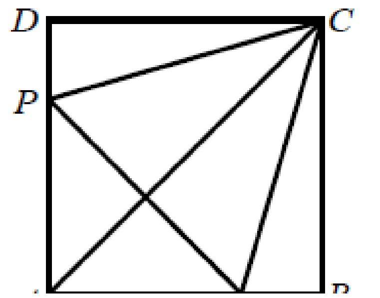
同理 $$\frac{S_{\Delta CXY}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}(XC)(CY)\sin\angle XCY}{\frac{1}{2}(BC)(CA)\sin\angle BCA}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}\text{。}$$

而 $$\frac{S_{\Delta AYZ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{\frac{1}{2}(YA)(AZ)\sin\angle YAZ}{\frac{1}{2}(CA)(AB)\sin\angle CAB}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\text{。}$$

由此 $\dfrac{S_{\Delta XYZ}}{S_{\Delta ABC}}=1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$。

# 淺問

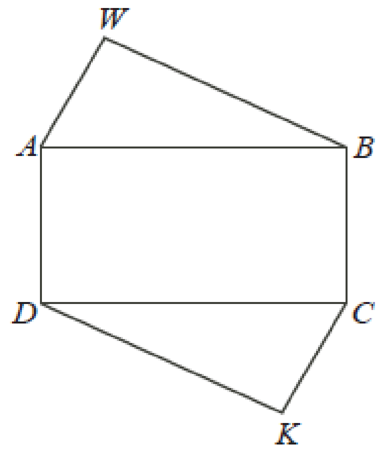
1. 若一個長方形的周界及對角線分別長 82 和 29。求該長方形的面積。 (FWMT-C 2003)




2. 右圖中，ABCD 為一正方形，且 AB = 1 及 $\Delta CPQ$ 為一等邊三角形。求 $\Delta CPQ$ 的面積。
(HKMO 1994/95 初賽團體)

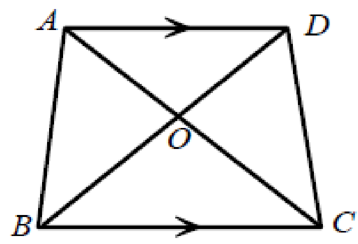
3. 某三角形的三邊長為 30、70 和 80。在邊長為 80 的邊上引一高線。求高線在此邊上截取較長的線段的長度。(AHSME 1958)

4. 等腰梯形兩平行邊分別長 10 和 6，腰長 8，求梯形面積。



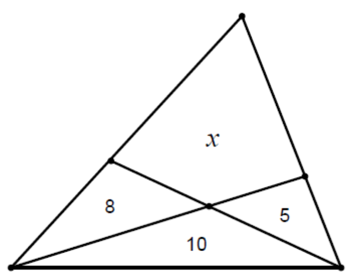

5. 右圖中，ABCD 為一長方形，且 AB = 20 及 BC = 10。W, K 為長方形外兩點使 WA = KC = 12 及 WB = KD = 16。求 WK。
(COMC 2010)

6. 一個直角三角形的三邊長度為 $a,b,c$，其中 c 為斜邊的長度。若 $\dfrac{a+b+c}{a+c}=\sqrt{2}$，且該三角形的面積為 2，求該三角形的周界。(HKMHASC 2011/12)




7. 等腰三角形的兩隻外角大小的比為 1:7，求所有底角的可能值之和。

8. 右圖中，ABCD 為一四邊形，其中 AD//BC，而 AC、BD 相交於 O，已知 $\Delta BOC$ 的面積 = 36，$\Delta AOD$ 的面積 = 25，求四邊形 ABCD 的面積。
(HKMO 1992/93 初賽個人)




9. 右圖中，一個三角形分成四個部分，每部分的面積如圖所記，求 x 的值。(SAMO-S 2008)

10. I、J 分別為 $\Delta ABC$ 的內心和垂心，若 $\angle A=100^\circ$，求 $\angle BIC$ 及 $\angle BJC$。

# 詳答

1 設長方形的長、闊分別為 $a,b$。

$\begin{cases} 2(a+b)=82 \\ \sqrt{a^2+b^2}=29 \end{cases}$，$\begin{cases} a+b=41 \\ a^2+b^2=841 \end{cases}$。

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= 1681 \\
a^2+b^2+2ab &= 1681 \\
841+2ab &= 1681 \\
ab &= 420
\end{aligned}
$$

所以長方形的面積為 420。

2. 設 $AP=PQ=x$，則 $PD=QB=1-x$。

$$
\begin{aligned}
PQ^2 &= x^2+x^2 \\
&= 2x^2 \\
PC^2 &= (1-x)^2+1^2 \\
&= 1^2-2x+x^2+1^2 \\
&= 2-2x+x^2
\end{aligned}
$$

由於 $\Delta CPQ$ 為一等邊三角形，所以

$$
\begin{aligned}
PQ^2 &= PC^2 \\
2x^2 &= 2-2x+x^2
\end{aligned}
$$

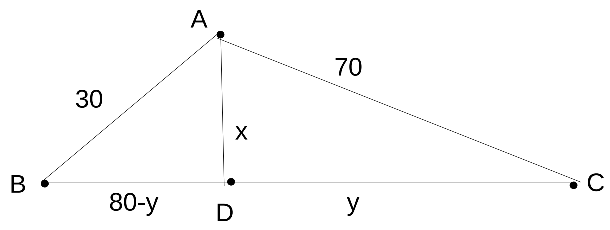
$x^2+2x-2=0$，即 $x=\dfrac{-2+\sqrt{12}}{2}=-1+\sqrt{3}$

即 $\Delta CPQ$ 的面積 $= 1\times1-2\times\dfrac{1\times[1-(-1+\sqrt{3})]}{2}-\dfrac{(-1+\sqrt{3})^2}{2}$

$= 1-(2-\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})$

$= 2\sqrt{3}-3$

3. 如圖，設高線長 x，截取較長的線段的長度為 y。




$$x^2+y^2 = 4900$$
$$x^2+(80-y)^2 = 900$$

於是有

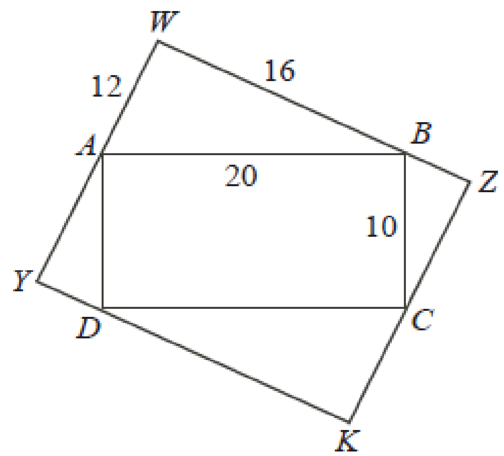
$$4900-y^2 = 900-(80-y)^2$$
$$4900-y^2 = 900-6400+160y-y^2$$
$$160y = 10400$$
$$y = 65$$

所以截取較長的線段長 65。

4. 高 $= \sqrt{8^2-(\frac{10-6}{2})^2} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

面積 $= \frac{(10+6)\times 2\sqrt{15}}{2} = 16\sqrt{15}$。

5. 如右圖，作 Y, Z 兩點使 WAY、YDK、KCZ 及 ZBW 成一直線。




由於 $\Delta ABW$ 符合畢氏定理逆定理，

即 $\angle W = 90°$，

由於 $\Delta ABW \cong \Delta CDK$，故 $\angle K = 90°$。

由於 ABCD 為一長方形，

所以 $\angle ABZ = \angle W + \angle WAB$，

$\angle ZBC = \angle WAB$。

同理 $\angle DCB = \angle K + \angle KDC$，

$\angle DCB = \angle KDC = \angle WBA$。

所以 $\Delta BZC \sim \Delta AWB$。

即 $\angle Z = 90°$ 及 $BZ = 6, ZC = 8$。

同理有 $\angle Y = 90°$ 及 $YD = 6, YA = 8$。

$$\begin{aligned} WK &= \sqrt{WZ^2+ZK^2} \\ &= \sqrt{(16+6)^2+(12+8)^2} \\ &= \sqrt{22^2+20^2} = 2\sqrt{11^2+10^2} \\ &= 2\sqrt{121+100} = 2\sqrt{221} \end{aligned}$$

6. $\dfrac{a+b+c}{a+c} = 1+\dfrac{b}{a+c} = \sqrt{2}$

$b = (\sqrt{2}-1)(a+c)$

由畢氏定理，

$$
\begin{aligned}
b^2 &= c^2-a^2 \\
(\sqrt{2}-1)^2(a+c)^2 &= (c-a)(c+a) \\
c-a &= (\sqrt{2}-1)^2(a+c) \\
c-a &= (3-2\sqrt{2})(a+c) \\
c-3c+2\sqrt{2}c &= 3a-2\sqrt{2}a+a \\
(2\sqrt{2}-2)c &= (4-2\sqrt{2})a \\
c &= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}a \\
&= \frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{2-1}a \\
&= (2\sqrt{2}-2+2-\sqrt{2})a \\
&= \sqrt{2}a
\end{aligned}
$$

即 $b = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)a = a$

即該三角形為等腰直角三角形。

由於面積 $\frac{1}{2}ab = 2$

$$
\begin{aligned}
a^2 &= 4 \\
a=b &= 2 \\
c &= 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

所以周界為 $a+b+c = 2+2+2\sqrt{2} = 4+2\sqrt{2}$

7. 設等腰三角形的頂角和底角所對應的外角分別為 $a,b$，

$\begin{cases} a=7b \\ a+2b=360^\circ \end{cases}$ 或 $\begin{cases} b=7a \\ a+2b=360^\circ \end{cases}$

即 $9b = 360^\circ$ 或 $15b = 360^\circ$

$b = 40^\circ$ 或 $b = 24^\circ$

所以所有底角的可能值之和 $= 40^\circ+24^\circ = 64^\circ$。

8. 因為 AD//BC，所以 $\Delta AOD \sim \Delta BOC$，

$\frac{AO}{BO} = \frac{DO}{CO} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$，

$\Delta COD$ 與 $\Delta BOC$ 為同高三角形，故 $\Delta COD$ 的面積為 $36 \times \frac{5}{6} = 30$。

$\Delta AOB$ 與 $\Delta AOD$ 為同高三角形，故 $\Delta AOB$ 的面積為 $25 \times \frac{6}{5} = 30$。

所以四邊形面積為 $36+30+30+25 = 121$。

9. 把三角形內的點連線至上方頂點，把 x 區域分成左、右兩方。
設左、右兩區域的面積分別為 $a,b$。
按同高三角形面積之比等於底長之比，

我們有： $\frac{5+a+b}{10+8} = \frac{a}{8}$ 及 $\frac{8+a+b}{10+5} = \frac{b}{5}$。

即 $\begin{cases} 8a+8b+40 = 18a \\ 5a+5b+40 = 15b \end{cases}$，

$\begin{cases} 5a-4b-20 = 0 \\ 5a-10b+40 = 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a = 12 \\ b = 10 \end{cases}$，

即 $x = a+b = 10+12 = 22$。

10. 連線 IB 及 IC。
由於 I 為內心，所以 IB 和 IC 分別為 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的角平分線。

$\angle B + \angle C = 180° - 100° = 80°$。

在 $\Delta BIC$ 中，

$\angle BCI + \angle CBI = \frac{80°}{2} = 40°$

所以 $\angle BIC = 180° - 40° = 140°$。

連線 BJP 及 CJQ，使 P 和 Q 分別在 AC 和 AB 上。
由於 J 為垂心，所以 $\angle BPC = \angle CQB = 90°$。

$\angle A + \angle BPC + \angle CQB + \angle PJQ = 360°$

$100° + 90° + 90° + \angle PJQ = 360°$

$\angle PJQ = 80°$

所以 $\angle BJC = \angle PJQ = 80°$