「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

幾何 － 多邊形

摘要

1. 正 n 邊形的內、外角：

   內角 ＝ $\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$　外角 ＝ $\dfrac{360^\circ}{n}$

2. (a) 計算半徑 R 的圓內接正 n 邊形的面積和周界。

   周界 ＝ $2nR\sin\dfrac{360^\circ}{n}$

   面積 ＝ $\dfrac{nR^2}{2}\sin\dfrac{360^\circ}{n}$

   (b) 計算半徑 r 的圓外切正 n 邊形的面積和周界。

   周界 ＝ $2nr\tan\dfrac{360^\circ}{2n}$

   面積 ＝ $nr^2\tan\dfrac{360^\circ}{2n}$

3. 運用希羅（Heron）公式或其他公式求三角形面積，
   進而推廣至婆羅摩笈多（Brahmagupta）公式求圓內接四邊形面積：

   (a) 給定三角形三邊長 a,b,c，則該三角形面積為

   $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中 $S=\dfrac{a+b+c}{2}$。

   (b) $S=\dfrac{1}{2}ah_A=\dfrac{1}{2}bh_B=\dfrac{1}{2}ch_C$，其中 h_A,h_B,h_C 為三垂線的長度。

   (c) 給定圓內接四邊形四邊長 a,b,c,d，則該四角形面積為

   $S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$，其中 $S=\dfrac{a+b+c+d}{2}$。

拾例

1. 若一正多邊形的某內角較其外角大 150°，求該正多邊形邊的數目。(HKMO 1988/89 初賽個人)

答： 設該正多邊形的邊數為 n，

$$\frac{(n-2)\times180^\circ}{n}-\frac{360^\circ}{n} = 150^\circ$$
$$(n-2)\times180^\circ-360^\circ = 150^\circ n$$
$$180^\circ n-720^\circ = 150^\circ n$$
$$180^\circ n-150^\circ n = 720^\circ$$
$$30^\circ n = 720^\circ$$
$$n = 24$$

所以該正多邊形的邊數為 24。

2. 一個凸多邊形除去一隻內角以外的所有角的和是 2190°。求多邊形的邊數。(AHSME 1973)

答： 由於除去的角必小於 180°。

由於 $2190^\circ = (15-2)\times180^\circ-150^\circ$，

所以得邊數 n 為 15。

3. 一個凸 n 邊形的 n 個內角和某一個外角的總和為 2345°。求 n 的值。

答： 由於對應的內角和外角的和必為 180°。

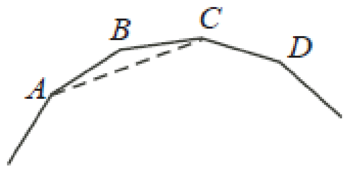
故該 n 邊形的 $n-1$ 個內角總和為 $2345^\circ-180^\circ=2165^\circ$。

又由於除去的內角必小於 180°。

由於 $2165^\circ = (15-2)\times180^\circ-175^\circ$，

所以得邊數 n 為 15。

4. 右圖為一正多邊形的部分。若 $\angle ACD=126^\circ$，求該正多邊形的邊數。



答： 設 $\angle ABC=x$，則 $\angle BCA=\dfrac{180^\circ-x}{2}$。

$$\angle BCD = \frac{180^\circ-x}{2}+126^\circ = x$$
$$\frac{3x}{2} = 216^\circ$$
$$x = 144^\circ$$

該正多邊形的邊數 $= \dfrac{360^\circ}{180^\circ-144^\circ} = \dfrac{360^\circ}{36^\circ} = 10$。

5.　在凸十三邊形的所有內角中，銳角至多有多少個？

答：　由於每個為銳角的內角對應著一個為鈍角的外角。

但由於外角和為 $360°$，

故外角最多只可有三個鈍角，即內角最只可有三個銳角。

（註：此條適用於任何凸多邊形。）

6.　四邊形 ABCD 中 $\angle A > \angle B > \angle C > \angle D$，它的四個外角的比為 3:5:7:9，求 $\angle A$。

答：　四邊形外角和為 $360°$，$\angle A$ 是最大角，即其外角為最小角。

$\angle A$ 的外角 $= 360° \times \dfrac{3}{3+5+7+9} = 360° \times \dfrac{1}{8} = 45°$。

$\angle A = 180° - 45° = 135°$。

7.　ABCDEFGH 為一圓內接正八邊形，若圓的半徑為 100，求該正八邊形的周界與面積。

答：　周界 $= 2 \times 8 \times 100 \sin 45° = 2 \times 8 \times 100 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= 800\sqrt{2}$。

面積 $= \dfrac{8 \times 100^2}{2} \sin 45° = \dfrac{8 \times 100^2}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$= 20000\sqrt{2}$

8.　P 是凸四邊形內的一點，P 與四個頂點連接得到的四個線段長分別為 1, 3, 5, 7。求凸四邊形面積的最大值。

答：　我們知道一個給定兩邊的三角形面積最大為夾角等於 $90°$ 時。

故四邊形面積最大為 P 在兩對角線交點且兩對角線互相垂直。

所以面積 $= \dfrac{1}{2}(a+b)(c+d)$　（a,b,c,d 為四個給定線段長）

其中以 $= \dfrac{1}{2}(1+7)(5+3) = 32$ 為最大。

9.　*某梯形各邊長分別為 6、12、12、12。求該梯形面積。

（培正 2011 初賽中二）

答：　該梯形必為等腰梯形，而所有等腰梯形均為圓內接的。

$p = \dfrac{6+12+12+12}{2} = 21$

面積 $= \sqrt{(21-6)(21-12)(21-12)(21-12)}$

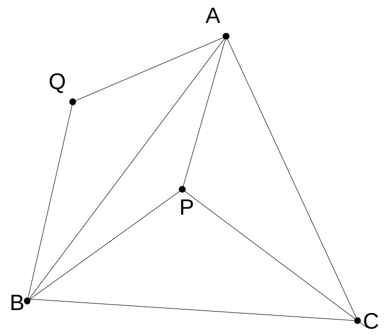
$= \sqrt{15 \times 9^3} = 9 \times 3 \times \sqrt{15} = 27\sqrt{15}$

10. P 為等邊三角形 ABC 內的一點，使 $PA=3, PB=4, PC=5$，求等邊三角形 ABC 的面積。

答： 作 $\Delta AQB \cong \Delta APC$，

由此 $\angle QAB = \angle PAC$，即 $\angle QAP = 60^\circ$。

所以 ΔAPQ 為邊長 3 的等邊三角形，



其面積 $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 3^2$

$= \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

在 ΔBPQ 中， $PQ = PA = 3$，

$PB = 4$ 及

$BQ = PC = 5$。

故其面積 $= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{36} = 6$。

所以四邊形 $APQB = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}+6$，

即 $S_{\Delta ABC} - S_{\Delta PBC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}+6$

同理 $S_{\Delta ABC} - S_{\Delta PAB} = \dfrac{25\sqrt{3}}{4}+6$

$S_{\Delta ABC} - S_{\Delta PCA} = \dfrac{16\sqrt{3}}{4}+6$，

三式相加，得 $2S_{\Delta ABC} = \dfrac{(9+16+25)\sqrt{3}}{4}+6\times 3$

$= 18+\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$。

$S_{\Delta ABC} = 9+\dfrac{25\sqrt{3}}{4}$。

淺問

1. 下列正多邊形內接於一半徑為 10 的圓，求該正多邊形的面積。
   (a) 正三角形 (b) 正方形 (c) 正六邊形

2. 下列正多邊形外切於一半徑為 10 的圓，求該正多邊形的面積。
   (a) 正三角形 (b) 正方形 (c) 正六邊形

3. 設 X,Y,Z,W 為正十二邊形的四個相連端點。若線段 XY 長度為 2 及四邊形 $XYZW$ 的面積是 $a+\sqrt{b}$，求 $B=2^a3^b$ 的值。
   (HKMO 2011/12 決賽個人)

4. 四邊形 ABCD 中，$\angle A:\angle B:\angle C:\angle D=2:3:5:8$，求四角對應的外角比。

5. 若正多邊形的內角與外角相差 $160°$，求該正多邊形的邊數。

6. 若正多邊形的內角是外角的五倍，求該正多邊形的邊數。

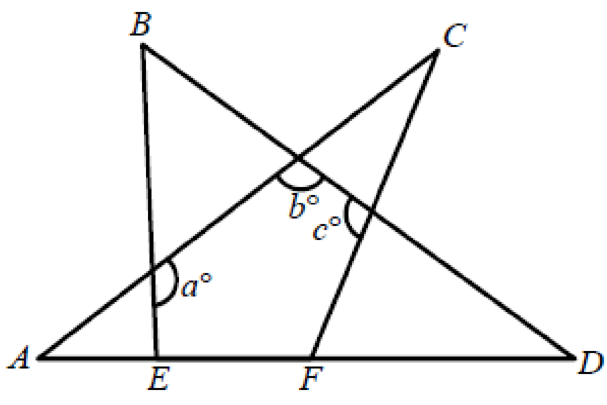
7. 某凸多邊形的內角度數成等差數列。若最小的角是 $100°$，最大角是 $140°$。求多邊形的邊數。(AHSME 1976)

8. 在五邊形 ABCDE 中，AB = BC = CD = DE，$\angle B=96°$ 且 $\angle C=\angle D=108°$。求 $\angle E$。(HKPSC 2009)

9. 十邊形最多有多少個內角為銳角？

10. 某個凸多邊形除去一隻內角以外的所有角的和是 $4230°$。求除去的角的度數。

11. 右圖中，AC、AD、BD、BE 及 CF 均為直線。若 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=140°$ 及 $S=a+b+c$，求 S 的值。
    (HKMO 2008/09 決賽團體)



12. 若三角形的四邊為 a,b,c，求該三角形的面積：
    (a) $a=5,b=6,c=7$ (b) $a=b=13,c=10$

13. 若圓內接四邊形的四邊為 a,b,c,d，求該四邊形的面積：
    (a) $a=3,b=4,c=5,d=6$ (b) $a=10,b=c=d=6$

詳答

1. (a) 面積 $= \frac{1}{2}\times 3\times 10^2\times \sin\frac{360^\circ}{3} = 150\sin 120^\circ$

$= 75\sqrt{3}$

(b) 面積 $= \frac{1}{2}\times 4\times 10^2\times \sin\frac{360^\circ}{4} = 200\sin 90^\circ$

$= 200$

(c) 面積 $= \frac{1}{2}\times 6\times 10^2\times \sin\frac{360^\circ}{6} = 300\sin 60^\circ$

$= 150\sqrt{3}$

2. (a) 面積 $= 3\times 10^2\times \tan\frac{360^\circ}{2(3)} = 300\tan 60^\circ$

$= 300\sqrt{3}$

(b) 面積 $= 4\times 10^2\times \tan\frac{360^\circ}{2(4)} = 400\tan 45^\circ$

$= 400$

(c) 面積 $= 6\times 10^2\times \tan\frac{360^\circ}{2(6)} = 600\tan 30^\circ$

$= 200\sqrt{3}$

3. 正十二邊形的內角為 $\frac{(12-2)\times 180^\circ}{12} = 150^\circ$，

所以 $\angle Y = \angle Z = 150^\circ$。

即 $\angle X = \angle W = \frac{360^\circ - 2\times 150^\circ}{2} = 30^\circ$。

因為 $\angle X + \angle Y = 30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$

所以 $YZ // XW$，即四邊形 $XYZW$ 是一個梯形。

$XW = 2\times 2\cos 30^\circ + 2 = 2+2\sqrt{3}$

梯形的高 $= 2\sin 30^\circ = 1$

四邊形 $XYZW$ 的面積 $= \frac{(2+2\sqrt{3}+2)\times 1}{2} = 2+\sqrt{3}$

即 $a=2, b=3$，所以 $B = 2^2\times 3^3 = 108$。

4. $\angle A = 360^\circ \times \frac{2}{2+3+5+8} = 40^\circ$，
$\angle B = 360^\circ \times \frac{3}{2+3+5+8} = 60^\circ$，
$\angle C = 360^\circ \times \frac{5}{2+3+5+8} = 100^\circ$，
$\angle D = 360^\circ \times \frac{8}{2+3+5+8} = 160^\circ$，
故 A, B, C, D 對應的外角分別 $140^\circ, 120^\circ, 80^\circ, 20^\circ$，
所以四角對應的外角比 $= 7:6:4:1$。

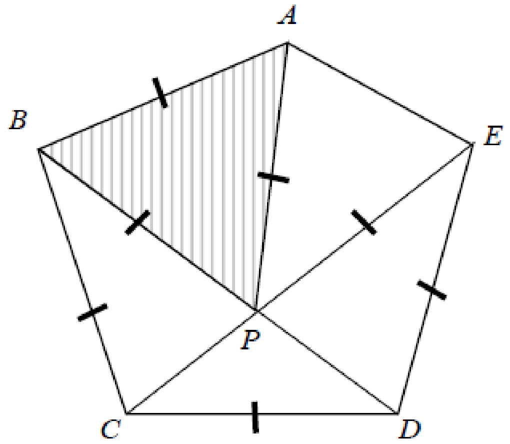
5. 設該正多邊形的外角為 x。
$x + (x + 160^\circ) = 180^\circ$
$2x + 160^\circ = 180^\circ$
$x = 10^\circ$
故該正多邊形的邊數為 $\frac{360}{10} = 36$。

6. 設該正多邊形的外角為 x，內角為 $5x$。
由於 $x + 5x = 180^\circ$
$6x = 180^\circ$
$x = 30^\circ$
由於外角為 30°，故邊數 $n = \frac{360}{30} = 12$。

7. 設多邊形的邊數為 n。
$(n-2) \times 180^\circ = \frac{n}{2}(100^\circ + 140^\circ)$
$180^\circ n - 360^\circ = 120^\circ n$
$60^\circ n = 360^\circ$
$n = 6$
所以邊數為 6。

8. 設 P 為 BD 及 CE 的交點。

如右圖。



因為 $\Delta BCD, \Delta CDE$ 為等腰三角形，

所以 $\angle CBD = \angle CDB$

= $\angle DEC = \angle DCE$

= $\dfrac{180° - 108°}{2} = 36°$

$\angle BCP = 108° - 36° = 72°$，

$\angle BPC = 180° - 36° - 72° = 72°$，

所以 BC = BP。同理 EP = ED。

即 AB = BP，再加上

$\angle ABP = 96° - 36° = 60°$，

所以 ΔABP 為等邊的。即 AP = EP。

$\angle CPD = 180° - 36° - 36° = 108°$ 及 $\angle APE = 108° - 60° = 48°$

所以 $\angle E = \dfrac{180° - 48°}{2} + 36° = 102°$

9. 由於每個為銳角的內角對應著一個為鈍角的外角。

由於外角和為 $360°$，

故外角最多只可有三個鈍角，即內角最只可有三個銳角。

（註： 此條件適用於任何多邊形。）

10. 由於除去的角必小於 $180°$。

由於 $4230°$ = $(26-2)\times 180° - 90°$，

所以除去的角為 $90°$。

11. 延線 BE 及 CF ，使之相交於 G 點，令 $\angle EGF = x$。

則 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + x = 180°$

即 $x = 40°$

另 $a + b + c + x = 360°$，

所以 $S = 360 - 40 = 320$。

12. (a) $s=\frac{5+6+7}{2}=9$，

面積 $= \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = \sqrt{216}$

$= 6\sqrt{6}$

(b) $s=\frac{13+13+10}{2}=18$，

面積 $= \sqrt{18(18-10)(18-13)^2} = \sqrt{3600}$

$= 60$

13. (a) $s=\frac{3+4+5+6}{2}=9$，

面積 $= \sqrt{(9-3)(9-4)(9-5)(9-6)} = \sqrt{360}$

$= 6\sqrt{10}$

(b) $s=\frac{10+6+6+6}{2}=14$，

面積 $= \sqrt{(14-10)(14-6)^3} = \sqrt{2048}$

$= 32\sqrt{2}$

如果說我看得比別人更遠，

那是因爲我站了在巨人的肩上。

英國物理學家、數學家、哲學家

牛頓

(Issac Newton 1642-1727)