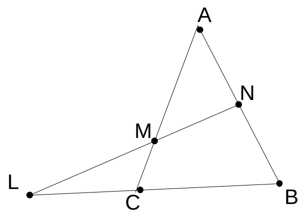
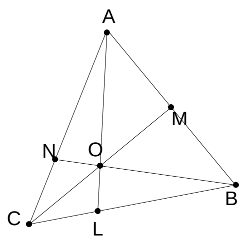
「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

幾何 – 平面幾何的重要定理

摘要

1. 認識基本圓、切圓、切線性質，計算相關的長度、角度和面積問題。
2. 運用圓冪定理：
   任一點至圓的兩點的距離乘積或
   至圓切點的切線長度的平方恆等。
3. 運用梅涅勞斯（Menelaus）定理：
   下圖左 $\frac{AN}{NB}\times\frac{BL}{LC}\times\frac{CM}{MA}=1$ 。

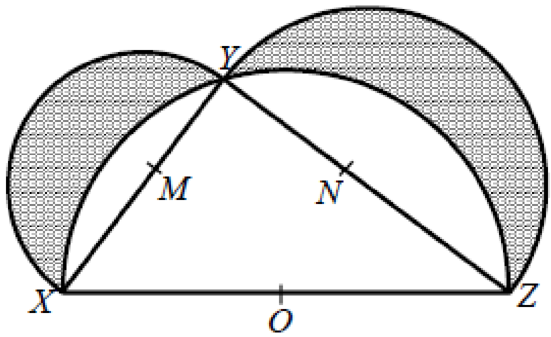




4. 運用塞瓦（Ceva）定理：
   上圖右 $\frac{AM}{MB}\times\frac{BL}{LC}\times\frac{CN}{NA}=1$
5. 在圓內接四邊形中，運用托勒密（Ptolemaeus）定理，
   即任一圓內接四邊形兩對邊長度乘積之和等於兩對角線之積。
6. 托勒密定理的一個應用：
   在等邊三角形 ABC 的外接圓，
   弧 AC 上的一點 P 使 $PB=PA+PC$ 。
7. 利用角平分線性質及相關公式求垂線、中線、角平分線的長度。
   角平分線定理：
   作 C 點的角平分線，使之至 AB 相交於 E 點，
   便有 $\frac{CB}{BE}=\frac{CA}{AE}$ 。

拾例

1.　如右圖，XY = 3, YZ = 4 和 ZX = 5。現以 M、N、O 為圓心作半圓，其中 M、N、O 分別為 XY、YZ、ZX 的中點。試求陰影部分面積之和。
(HKMO 1993/94 初賽個人)



答：　由畢氏定理的逆定理可知，
$\angle Y = 90°$。
陰影部分面積之和

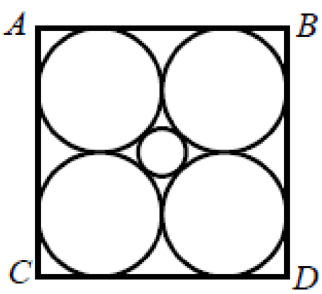
$$= \frac{1}{2}\pi[(\frac{3}{2})^2 + (\frac{4}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2] + \frac{3\times 4}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\pi[(\frac{5}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2] + \frac{3\times 4}{2} = \frac{3\times 4}{2} = 6$$

2,　在凸四邊形 ABCD 中，$AB = BC = BD$，$\angle ABC = 100°$，求 $\angle ADC$。

答：　以 B 作圓心，AB 為半徑作圓，則 A, C, D 三點均在圓上。
故　反 $\angle ABC = 2\angle ADC$
即　$\angle ADC = \frac{360° - 100°}{2} = 130°$。

3.　右圖中，ABCD 是個邊長 10 的正方形。求正方形中間小圓的半徑。



答：　由於正方形邊長為 2 大圓直徑，
所以大圓半徑為 $\frac{5}{2}$。
設小圓半徑為 r，則以三圓圓心作直角三角形，

$$2\times 5^2 = (5+2r)^2$$
$$4r^2 + 20r + 25 = 50$$
$$4r^2 + 20r - 25 = 0$$
$$r = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4\times 4\times(-25)}}{2\times 4} = \frac{-20\pm\sqrt{800}}{8}$$
$$= \frac{-5\pm 5\sqrt{2}}{2}$$

由於 $r > 0$，
故　$r = \frac{-5+5\sqrt{2}}{2}$。

4. 三圓兩兩外切，而三圓半徑分別為 5, 6, 7，求以三圓圓心為頂點的三角形的面積。

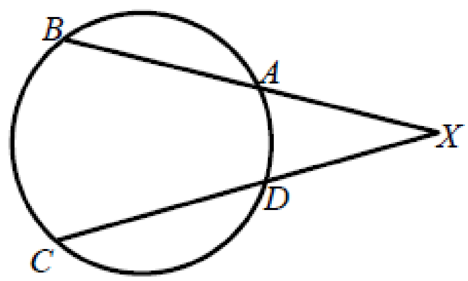
答： 三角形三邊長分別為 $5+6=11$ 、$6+7=13$ 及 $7+5=12$ 。

令 $p=\dfrac{11+12+13}{2}=18$

三角形面積 = $\sqrt{18(18-11)(18-12)(18-13)}$

= $\sqrt{18\times 7\times 6\times 5}$ = $6\sqrt{105}$ 。

5. 右圖中，XA = 8、 AB = 4、XD = 6，求 DC 的值。



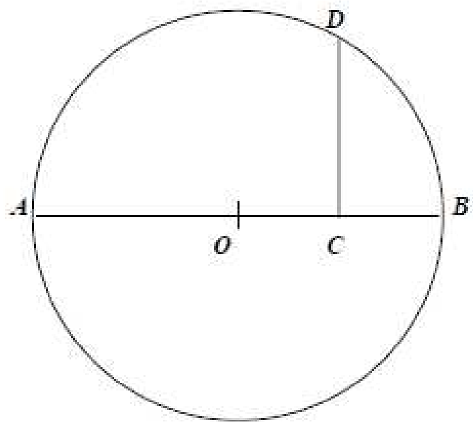
答： $XA\times XB$ = $XD\times XC$ （圓冪定理）

$8\times(8+4)$ = $6\times(6+x)$

$36+6x$ = 96

x = 10。

6. 右圖中，O 為圓心，AB 為直徑。AC = 8 及 CB = 2。 D 為圓上一點使 CD 與 AB 相 交成直角。問 CD 幾長？（FYMT-J 1996）



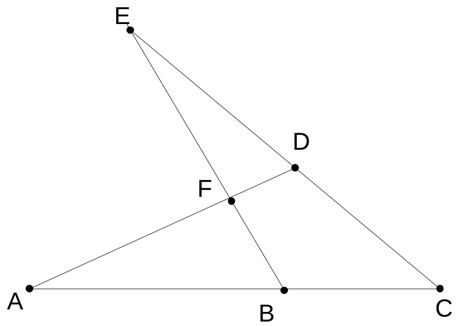
答： 根據圓冪定理，

CD^2 = $AC\times CB$

= 2×8 = 16

CD = 4。

7. 右圖中，$\frac{AB}{BC}=\frac{EF}{FB}=2$，求 $\frac{DE}{CD}$ 及 $\frac{AF}{FD}$ 。



答； 在 ΔEBC 中運用梅涅勞斯定理：

$$\frac{EF}{FB}\times\frac{BA}{AC}\times\frac{CD}{DE}=1$$

$$\frac{DE}{CD}=\frac{EF}{FB}\times\frac{BA}{AC}$$

$$=\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\text{。}$$

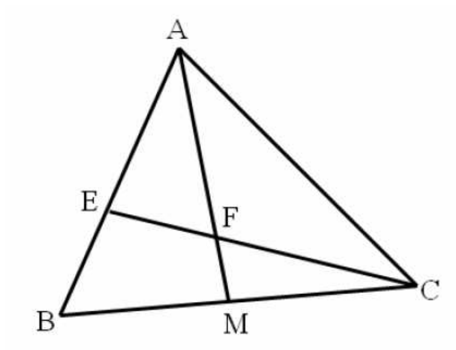
在 ΔACD 中運用梅涅勞斯定理：

$$\frac{AF}{FD}\times\frac{DE}{EC}\times\frac{CB}{BA}=1$$

$$\frac{AF}{FD}=\frac{EC}{DE}\times\frac{BA}{CB}$$

$$=\frac{7}{4}\times\frac{2}{1}=\frac{7}{2}\text{。}$$

8. 右圖中，ABC 是一個銳角三角形，M 是 BC 的中點，AE 的長度是 BE 的 3 倍。若 ΔAFC 的面積是 10，求 ΔAEF 的面積。



答： 運用梅涅勞斯定理：

$$\frac{CM}{MB}\times\frac{BA}{AE}\times\frac{EF}{FC}=1$$

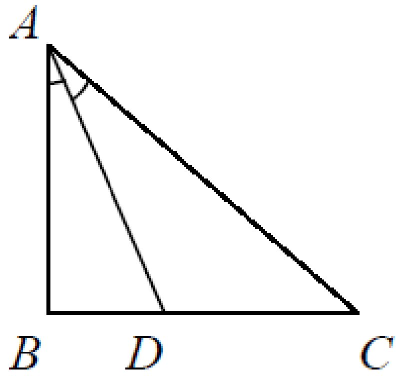
$$\frac{1}{1}\times\frac{4}{3}\times\frac{EF}{FC}=1$$

$$\frac{EF}{FC}=\frac{3}{4}$$

由同高三角形的性質，

$$\Delta AEF\text{ 的面積}=\frac{3}{4}\times 10=\frac{15}{2}\text{。}$$

9. 右圖中，ΔABC 的邊長 AB、BC 及 CA 分別為 5, 12, 13。$\angle BAC$ 的角平分線交 BC 於 D。求 ΔABD 的'面積。



答： 由於 5, 12, 13 為畢氏數組，

所以 $\angle B = 90^\circ$。

由角平分線定理，得

$$\frac{CA}{CD} = \frac{BA}{BD}$$

$$\frac{13}{12 - BD} = \frac{5}{BD}$$

$$13BD = 60 - 5BD$$

$$18BD = 60$$

$$BD = \frac{10}{3}$$

所以 ΔABD 的面積 $= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{10}{3} = \frac{25}{3}$。

10. 等腰梯形的腰長 10，兩底分別長 20 和 13 ，問對角線長多少？

答： 因等腰梯形為圓內接的且兩對角線等長，

故對角線 $= \sqrt{13 \times 20 + 10 \times 10} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$。

感覺到數學的美，感覺到數與形的協調，感覺到幾何的優雅，這是所有真正的數學家都清楚的真實的美的感覺。

法國數學家、理論物學家、哲學家

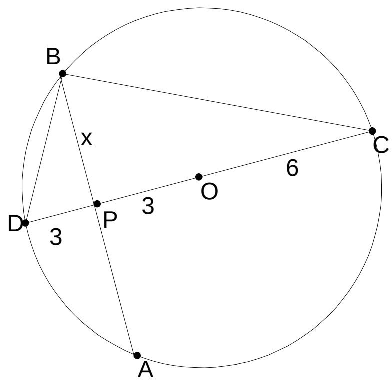
龐加萊

(Henri Poincare 1854-1912)

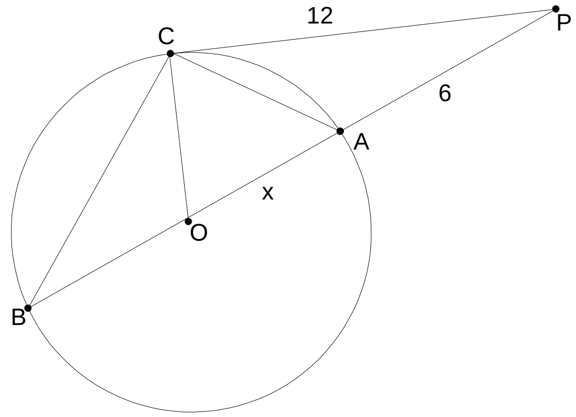
淺問

1. 在下列各圖中，O 是圓心，且求 x 的值：

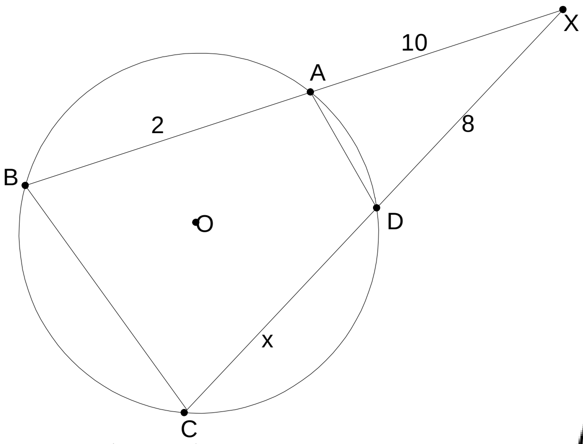
(a)



(b)

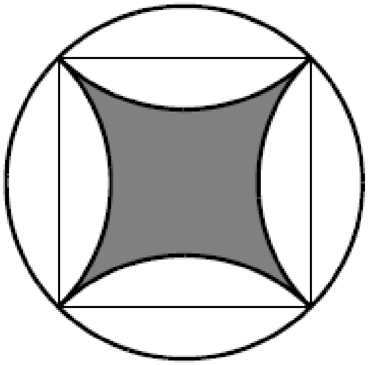


(c)



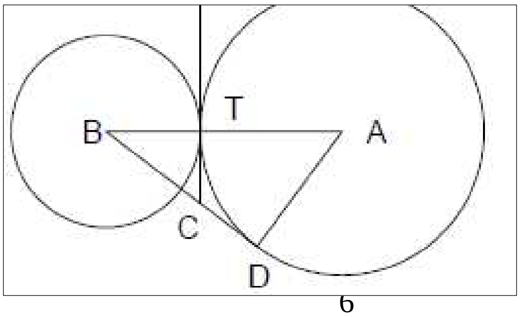
(HKMO 1990/91 初賽個人)

2. 一個正方形內接於半徑為 1 的圓內。若果把正方形外圓的四個弓形向內摺疊，得陰影部分，求陰影部分面積。(SAMO-S 2011)

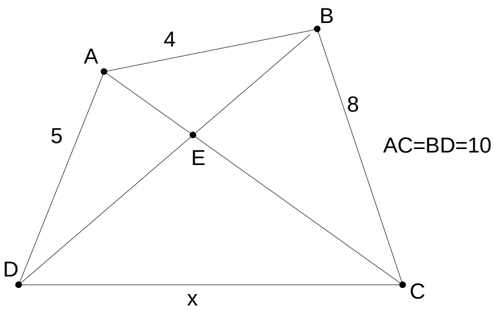


3. 三圓 O_A、O_B、O_C 兩兩相切，三圓心 A、B、C 三點組成的三角形 ABC 三邊 AB、BC、CA 分別長 10、14、20，求三圓的半徑。

4. 如右圖，兩圓分別以 A, B 為圓心相切於 T。BD 為 D 點的切線且 TC 為公共切。若 AT = 3 及 BT = 2。求 CD。(SAMO-S 1997)

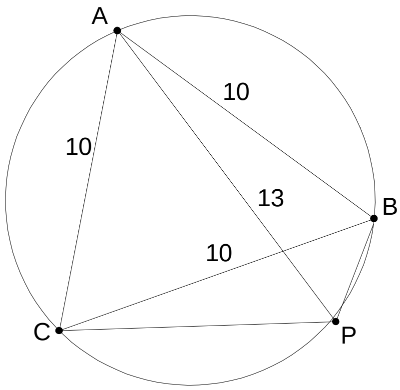


5. 右圖的四邊形 ABCD 為圓內接的，兩對角線相交於 E 點，求 x 且求該四邊形面積。



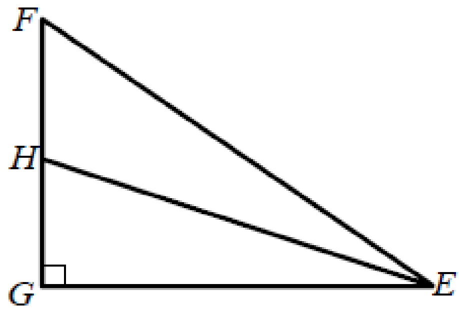
6. 在三角形 ABC 中，$AB=\frac{20}{11}AC$ 。$\angle A$ 的角平分線與 BC 相交於 D，而 M 是 AD 的中點。設 P 為 AC 與 BM 的交點，若 CP:PA = $\frac{m}{n}$，其中 m,n 為兩互素正整數，求 $m+n$ 的值。(AIME 2011)

7. 右圖中 ΔABC 為邊長 10 的等邊三角形， P 為 ΔABC 外接圓上的一點且 PA = 13，求 PA + PB + PC 的值。



8. 兩同心圓半徑分別為 4 和 44。圓 C 與該兩同心圓相切，求圓 C 半徑的所有可能值之乘積。

9. 右圖中，EFG 為一直角三角形。已知 H 為 FG 上的一點，使得 GH:HF = 4:5 及 $\angle GEH=\angle FEH$ 。若 $EG=1$ 及 $FG=d$ 。求 d 的值。(HKMO 2009/10 決賽個人)

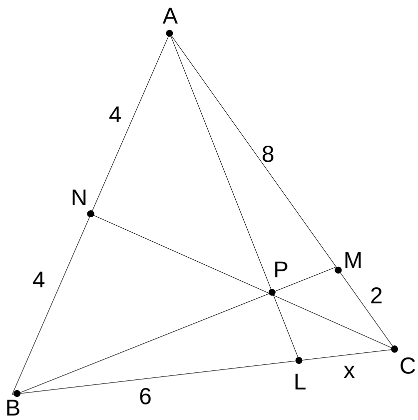


10. 在 ΔABC 中，點 A',B',C' 分別在邊 BC,CA,AB 上，使 AA',BB',CC' 共點於 O。

若 $\frac{AO}{OA'}+\frac{BO}{OB'}+\frac{CO}{OC'}=2003$，

求 $\frac{AO}{OA'}\times\frac{BO}{OB'}\times\frac{CO}{OC'}$ 的值。

11. 右圖中，P 為 ΔABC 中的一點，且令 AP、BP 和 CP 分別與 BC、CA 和 AB 相交於 L、M 和 N 三點。試求 x 的值，並求 $\frac{\Delta ANP}{\Delta CLP}$ 的值。



詳答

1. (a)

$$\begin{aligned} PA\times PB &= PC\times PD \quad \text{(圓冪定理)}\\ x^2 &= 3\times(3+6)\\ &= 27\\ x &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} PC^2 &= PA\times PB \quad \text{(圓冪定理)}\\ 12^2 &= 6(6+2x)\\ 144 &= 36+12x\\ x &= 9 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} XA\times XB &= XC\times XD \quad \text{(圓冪定理)}\\ 10(10+2) &= 8(8+x)\\ 120 &= 64+8x\\ x &= 7 \end{aligned}$$

2. 正方形的對角線長為 2，故面積為 $\frac{1}{2}(2)^2$，

而圓面積為 $\pi(1)^2=\pi$。

故陰影部分面積 $= 2-(\pi-2) = 4-\pi$。

3. 設三圓半徑分別為 a,b,c，即

$\begin{cases} a+b=10 \\ b+c=14 \\ c+a=20 \end{cases}$，三式相加，得 $a+b+c=22$，故得 $c=12, a=8, b=2$。

故三圓半徑為 2、8、12。

4. AB = 3 + 2 = 5

$\angle ADB = 90^\circ$

所以 BD = $\sqrt{5^2-3^2}$ = 4

另 $\Delta BTC \sim \Delta BDA$，

所以 $\frac{BT}{BD}=\frac{TC}{AD}$，$TC=\frac{2}{4}\times 3=\frac{3}{2}$。

又因切線性質，$CD=TC=\frac{3}{2}$。

5. $AD \times BC + AB \times CD$ = $AC \times BD$ （托勒密定理）

$5 \times 8 + 4x$ = 10×10

x = 15

p = $\dfrac{4+5+8+15}{2}$ = 16

面積 = $\sqrt{(16-15)(16-8)(16-5)(16-4)}$

= $\sqrt{1056}$ = $4\sqrt{66}$

6. 解法 1：

由角平分線定理，得

$\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{20}{11}$

作 D' 在 AC 上，使 $DD' // BP$。

由此在 ΔBCP，由截線定理得

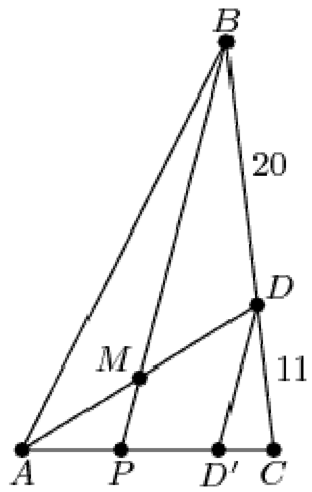
$\dfrac{CP}{PD'}$ = $\dfrac{11+20}{20}$ = $\dfrac{31}{20}$

但在 $\Delta ADD'$，由截線定理得

$\dfrac{AP}{PD'}$ = $\dfrac{AM}{MD}$ = 1

即 $AP = PD'$， 所以 $\dfrac{CP}{PA} = \dfrac{31}{20}$，

即 $m = 31, n = 20$， $m + n = 31 + 20 = 51$。



解法 2：

由角平分線定理，得

$\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{20}{11}$

運用梅涅勞斯定理，

$\dfrac{CP}{PA} \times \dfrac{AM}{MD} \times \dfrac{DB}{BC}$ = 1

$\dfrac{CP}{PA} \times 1 \times \dfrac{20}{31}$ = 1

所以 $\dfrac{CP}{PA} = \dfrac{31}{20}$，

即 $m = 31, n = 20$， $m + n = 31 + 20 = 51$。

7. $AB \times PC + AC \times PB = PA \times BC$ （托勒密定理）

$10PC + 10PB = 10 \times 13$

所以 $PB + PC = 13$

$PA + PB + PC = 2 \times 13 = 26$

8. 圓 C 的半徑 = $\dfrac{44 \pm 4}{2}$ = 24 或 20

故所求乘積為 24×20 = 480。

9. $\dfrac{EG}{GH} = \dfrac{EF}{HF}$ （角平分線定理）

$\dfrac{EG}{EF} = \dfrac{GH}{HF}$

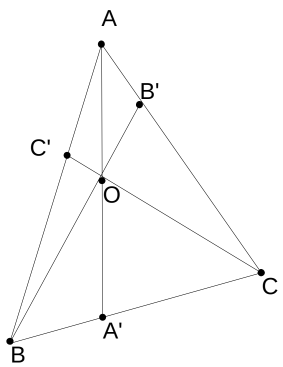
$\dfrac{1}{EF} = \dfrac{4}{5}$

EF = $\dfrac{5}{4}$

d = FG = $\sqrt{EF^2 - EG^2}$ = $\sqrt{1.25^2 - 1^2}$ = 0.75

10. 由共邊三角形面積的比得

$\dfrac{OA'}{AA'} = \dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta ABC}}$，$\dfrac{OB'}{BB'} = \dfrac{S_{\Delta OCA}}{S_{\Delta ABC}}$，$\dfrac{OC'}{CC'} = \dfrac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta ABC}}$



所以 $\dfrac{OA'}{AA'} + \dfrac{OB'}{BB'} + \dfrac{OC'}{CC'}$

= $\dfrac{S_{\Delta OBC} + S_{\Delta OCA} + S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta ABC}}$

= $\dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}}$ = 1

即 $\dfrac{OA'}{AO + OA'} + \dfrac{OB'}{BO + OB'} + \dfrac{OC'}{CO + OC'}$ = 1

記 $\dfrac{AO}{OA'} = p$，$\dfrac{BO}{OB'} = q$，$\dfrac{CO}{OC'} = r$：

上式 = $\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} + \dfrac{1}{r+1}$ = 1

即 $(p+1)(q+1) + (q+1)(r+1) + (r+1)(p+1) = (p+1)(q+1)(r+1)$

$pq + p + q + 1 + qr + q + r + 1 + rp + r + p + 1$

$= p + q + r + pq + qr + rp + p + q + r + 1$

$p + q + r + 2 = pqr$

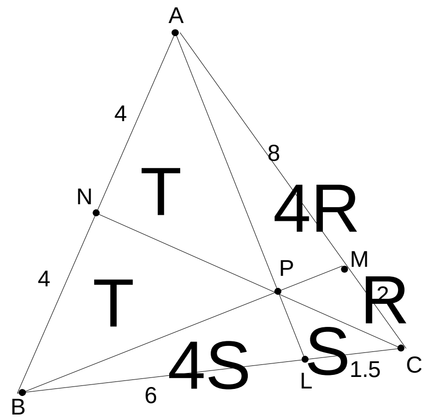
所以 $pqr = 2003 + 2 = 2005$。

11. $\frac{AN}{NB} \times \frac{BL}{LC} \times \frac{CM}{MA} = 1$ （塞瓦定理）

$\frac{4}{4} \times \frac{6}{x} \times \frac{2}{8} = 1$

$x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

設圖中各三角形面積如下：



但	4R + R + T	=	4S + S + T，故 R = S。
及	4(4R + R + S)	=	T + T + 4S，
即	24S	=	2T + 4S，得 T = 10S，得答案為 10。

能夠作出數學發現的人，是具有感受數學中的秩序、和諧、對稱、整齊和神秘的美等能力的人，而且只限於這種人。

法國數學家、理論物學家、哲學家

龐加萊

(Henri Poincare 1854-1912)