「噢！數？」 拾例集　　　周浩然輯

幾何 － 立體幾何

摘要

1. 運用相關三角或幾何公式處理
   立體多面體的角度、線長、面積、體積等問題。
2. 歐拉（Euler）公式及其運用：
   若一凸多面體有面數 F、頂點數 V 及棱數 E：
   (a)　$F+V=E+2$
   (b)　各面角之和　=　$(V-2)\times 360^\circ$
   (c)　各面之邊數總和　=　各頂點之邊數總和　=　2E
3. 認識柏拉圖（Plato）立體的特性：

名稱	面數	棱數	頂點數	面的正多邊形
正四面體	4	6	4	正三角形
正六面體	6	12	8	正方形
正八面體	8	12	6	正三角形
正十二面體	12	30	20	正五邊形
正二十面體	20	30	12	正三角形

4.　認識阿基米德（Archimedea）立體的特性：

名稱	面數	棱數	頂點數	面的 正多邊形	簡稱
截角四面體	8	18	12	4(3), 4(6)	3,6,6
截半立方體	14	24	12	8(3), 6(4)	3,4,3,4
截角立方體	14	36	24	8(3), 6(8)	3.8.8
截角八面體	14	36	24	6(4), 8(6)	4,6,6
小斜方截半立方體	26	48	24	8(3), 18(4)	3,4,4,4
大斜方截半立方體	26	72	48	12(4), 8(6), 6(8)	4,6,8
截半二十面體	32	60	30	20(3), 12(5)	3,5,3,5
截角十二面體	32	90	60	20(3), 12(10)	3,10,10
截角二十面體	32	90	60	12(5), 20(6)	5,6,6
扭棱立方體	38	60	24	32(3), 6(4)	3,3,3,3,4
小斜方截半二十面體	62	120	60	20(3), 30(4), 12(5)	3,4,5,4
大斜方截半二十面體	62	180	120	30(4), 20(6), 12(10)	4,6,10
扭棱十二面體	92	150	60	80(3), 12(5)	3,3,3,3,5

拾例

1. 長方體的稜長分別為 5, 6 和 8，求長方體頂點與頂點間的最大距離。

答： 最大距離即空間對角線長度 $= \sqrt{5^2+6^2+8^2}$

$= \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ 。

2. 長方體的三個互不平行的面的面積分別為 108, 135, 180，求該長方體的體積。

答： 長方體體積 $= \sqrt{108\times135\times180}$

$= \sqrt{(2^2\times3^3)\times(3^3\times5)\times(2^2\times3^2\times5)}$

$= \sqrt{2^4\times3^8\times5^2} = 2^2\times3^4\times5 = 1620$ 。

3. 一正方體的表面積是 b cm^2 。若它每一條邊的長度增加 3 cm，它的體積隨之增加 $(2b-3)cm^3$ ，求 b 的值。（HKMO 2012/13 決賽個人）

答： 設正方體的邊長為 x cm，

則 b $= 6x^2$

及 $(x+3)^3 = x^3+2b-3$

整理得 $x^3+9x^2+27x+27 = x^3+12x^2-3$

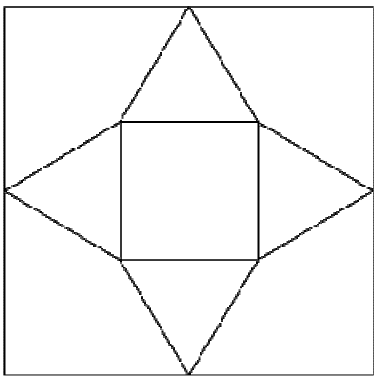
$3x^2-27x-30 = 0$

$x^2-9x-10 = 0$

$x=10$ 或 $x=-1$ （捨去）

故 b $= 6\times10^2 = 600$ 。

4. 如右圖，外面的正方形 S 的邊長為 100，內裡的正方形 S' 的邊長為 40。S' 和 S 有著共同的中心且 S' 的邊平行於 S 的邊。在 S 的四邊的中點，作直線至兩個最近的 S' 的頂點。這樣在 S 內作了一個星形的圖，把這圖剪下，可接成一個以 S' 為底的錐體，求這錐體的體積。



答： 正方形 S' 的面積為 $40^2=1600$ 。

三角形的高 $= \dfrac{100-40}{2} = 30$

故錐體的高 $= \sqrt{30^2-20^2} = \sqrt{500}$

$= 10\sqrt{5}$

故錐體的體積 $= \dfrac{1}{3}\times30\times10\sqrt{5} = 100\sqrt{5}$ 。

5. 一實心正方體邊長 20 cm 。現將這正方體表面全部塗上顏色，然後分割為邊長為 4 cm 的全等小正方體。求這些小正方體沒有塗上顏色的面的總面積。

答： 我們可以視在與每面平行的方向切四刀，分割成小正方體。
即共切了十二刀，每刀有兩面沒有著色，
故沒著色總面積 = 12×20^2 = $4800\ cm^2$。

6. 將一個正方體的表面都染成紅色，再切割成 $n^3,(n>2)$ 個相同的小正方體。若恰有兩面是紅色的小正方體數目與只有一面是紅色的小正方體數目相同，求 n 的值。

答： 恰有兩面為紅色的小正方體數目為 $12(n-2)$，
只有一面為紅色的小正方體數目為 $6(n-2)^2$。
由於 $n\neq 2$，且 $12(n-2) = 6(n-2)^2$
$n-2 = 2$
n = 4。

7. 一個正六面體有 8 個頂點，那麼一個正十二面體有多少個頂點？

答： 20。
（註： 兩立體的頂點數、棱數和面數並無任何關係。）

8. 大斜方截半立方體的簡記為 (4, 6, 8)，且該立體由 12 個正方形、8 個正六邊形和 6 個正八邊形組成。問該立體的棱數、頂點數和面數各多少？

答： 面數 = $12+6+8$ = 26。
各面棱數總和 = $12\times 4+8\times 6+6\times 8$ = 144，
由於每棱均接連兩邊，故棱數 = $\frac{144}{2}$ = 72。
各面頂點數總和 = $12\times 4+8\times 6+6\times 8$ = 144，
由於每頂點均接連三面，故頂點數= $\frac{144}{3}$ = 48。

9. 把三個邊長分別為 1, 3, 5 的正立方體，以面貼面的方法黏合起來。若 a 為所得的多面體最小總面積，求 a 的值。

答： 要得最小總面積，必然使三個正方體以一整面貼一整面的方式的貼合。
而貼合面為較小的正方體的一面的面積的兩倍，
即有兩個 3×3 的面和四個 1×1 的面貼合。
故 a = $6(1^2+3^2+5^2)-4(1^2)-2(3^2)$ = $6\times 35-4-18$ =
= 188。

10. 若把兩條異面的直線視作「一對」，那麼正四棱錐的八條直線中共有多少對？

答： 在正四棱錐中，一對異面直線必定有一底邊和側棱組成。
而每條底邊可與 2 條側棱成對，故答案為 $4\times2=8$ 對。

埃及王問道：

「幾何之法，更有捷徑否？」

歐幾里得對曰：

「夫幾何一途，若大道然，

王安得獨辟另途也？」

中國數學家

李善蘭

(1811-1882)

《幾何原本》中譯本序

淺問

1. 如圖所示，ΔABC 和 ΔXYZ 為等邊三角形，同時亦為一柱體的底和面。P 為 BY 的中點，且 BP = 3cm，XY = 4cm。

(a) 若 $a=\frac{CP}{PX}$，求 a 。

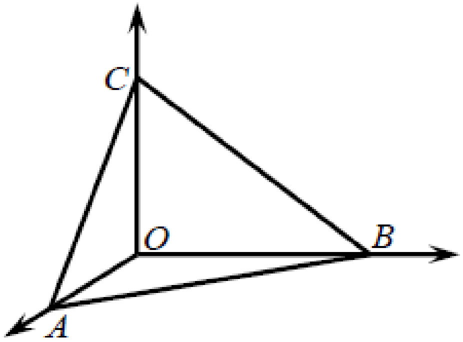
(b) 若 $CX=\sqrt{b}cm$，求 b 。

(c) 若 $\cos\angle PCX=\frac{\sqrt{c}}{5}$，求 c 。

(d) 若 $\sin\angle PXC=\frac{2\sqrt{d}}{5}$，求 d 。

(HKMO 1991/92 決賽團體)

2. OABC 為一四面體，其中 OA、OB 及 OC 互相垂直。已知 $OA=OB=OC=6x$ 。



(a) 若 OABC 體積為 ax^3，求 a 。

(b) 若 ΔABC 的面積為 $b\sqrt{3}x^2$，求 b 。

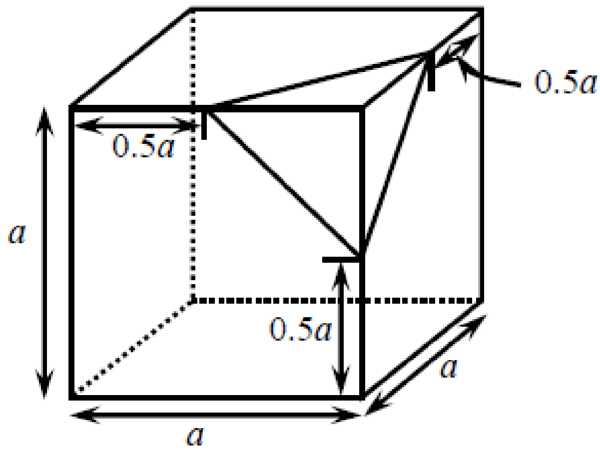
(c) 若由 O 至 ΔABC 的距離為 $c\sqrt{3}x$，求 c 。

(d) 若由 C 至 AB 的中點的俯角為 θ，且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{d}}{3}$，求 d。

(HKMO 1992/93 決賽團體)

3. 如右圖所示，從正方體的一角割出一個三角錐體。若 $a=12$，且 三角錐體的體積為 bcm^3，求 b 的值。

(HKMO 1996/97 決賽個人)



4. 求下列凸多面體的面角總和：

(a) 頂點數 = 10 (b) 面數 = 5 及 棱數 = 9

5. 若下列正多面體的邊長為 1，求該正多面體的體積和總表面積。

(a) 正四面體 (b) 正方體 (c) 正八面體

6. 一實心正方體邊長 9 cm 。現將這正方體表面全部塗上顏色，然後分割為27個邊長為 3 cm 的全等小正方體。求這些小正方體沒有塗上顏色的面的總面積。（HKMO 1993/94 初賽團體）

7. 正方體的空間對角線長 12，求該正方體的總表面積。

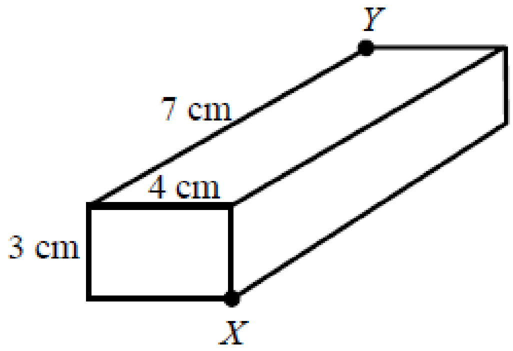
8. 若一長方體的三組平面對角線分別長 14,16,18 ，求該長方體的

(a) 空間對角線長度。

(b) 外接球表面積。（答案以 π 表示）

9. 一長方形盒子的三面不同面的面積分別為 120、 72 和 60 。求盒子的體積。
(HKMO 1992/93 初賽個人)

10. 右圖中，一長方體盒的邊長分別是 3 cm，4 cm 及 7 cm。若在盒面上從點 X 到點 Y 的最短路徑的長度是 K cm，求 K 的值。
(HKMO 2005/06 初賽團體)



11. 把三個體積分別為 1, 8, 27 的正立方體，以面貼面的方法黏合起來。若 a 為所得的多面體最小總面積，求 a 的值。（HKMO 2009/10 決賽個人）

12. 某數量的單位立方體黏合成一長方體。長方體的六面分別塗上顏色，而這六個面均不是正方形。若 x 為完全沒有塗上顏色的單位立方體之數目，y 為恰好一面塗上顏色的單位立方體之數目，z 為恰好兩面塗上顏色的單位立方體之數目，則 $x-y+z=2002$。求長方體的體積。

13. 已知一個正六棱柱的底面邊長為 $2\sqrt{3}$，最長對角線長 8，求此正六棱柱的體積。

14. 已知一個正六棱錐的底面邊長為 2，高為 1，求此正六棱錐頂點至底面各邊的距離。

詳答

1. (a) $CP=PX=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以 $a=\dfrac{CP}{PX}=\dfrac{5}{5}=1$。

(b) $CX=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}$，所以 $b=52$。

(c) ΔPCX 為一等腰三角形，由 P 點作垂線至 CX 於 Q，XQ = QC。

$$\cos\angle PCX=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{52}}{5}=\frac{\sqrt{13}}{5}$$，所以 $c=13$。

(d) $PQ=\sqrt{5^2-(\sqrt{13})^2}=\sqrt{12}$

$$\sin\angle PXC=\frac{\sqrt{12}}{5}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$$，所以 $d=3$。

2. (a) $ax^3 = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(6x)^2\times(6x) = 36x^3$。

所以 $a=36$。

(b) $AB=BC=CA = \sqrt{(6x)^2+(6x)^2} = 6\sqrt{2}x$

所以 ΔABC 為一等邊三角形。

$$b\sqrt{3}x^2 = \frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}x)^2\times\sin 60^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}x)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}x^2$$

所以 $b=18$。

(c) $\dfrac{1}{3}\times18\sqrt{3}x^2\times c\sqrt{3}x = 36x^3$

c = 2

(d) 設 AB 的中點為 M，

$$\frac{OM\times AB}{2} = \frac{OA\times OB}{2}$$
$$6\sqrt{2}x\times OM = (6x)^2$$
$$OM = 3\sqrt{2}x$$
$$CM = \sqrt{OM^2+OC^2}$$
$$= \sqrt{(3\sqrt{2}x)^2+(6x)^2} = 3\sqrt{6}x$$
$$\sin\theta=\frac{\sqrt{d}}{3} = \frac{OC}{CM} = \frac{3\sqrt{2}x}{3\sqrt{6}x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以 $d=3$。

3. b $= \frac{1}{3}\times(\frac{6}{2})^3 = 9$

4. (a) 面角總和 $= (10-2)\times 360° = 8\times 360°$

$= 2880°$

(b) 頂點數 $= 9-5+2 = 6$

故面角總和 $= (6-2)\times 360° = 1440°$

5. (a) 底面積 $= \frac{1}{2}(1)(1)\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}$

總表面積 $= 4\times\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

由於底為等邊三角形，故體高垂足和重心重疊，重心與點距離為中線的 $\frac{2}{3}$ 。

體高 $= \sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

體積 $= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$

(b) 總表面積 $= 6\times 1^2 = 6$

體積 $= 1^3 = 1$

(c) 總表面積 $= 8\times\frac{\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$

把正八面體看成兩個體積相等的正方錐體。

該錐體高為 $= \sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

體積 $= \frac{1}{3}\times(1)^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$

6. 解法一：

我們可以視在與每面平行的方向切兩刀，分割成二十七個小正方體。
即共切了六刀，每刀有兩面沒有著色，
故沒著色總面積 $= 12\times 9^2 = 972\ cm^2$。

解法二：

著色總面積 $= 6\times 9^2 = 486\ cm^2$，
切細後的總面積 $= 27\times(6\times 3^2) = 1458\ cm^2$，
故沒著色總面積 $= 1458-486 = 972\ cm^2$。

7. 設正方體的邊長為 x，則 $\sqrt{x^2+x^2+x^2} = 12$

$3x^2 = 144$

$x^2 = 48$

總表面積 $= 6x^2 = 288$。

8. (a) 設長方體的長、闊、高分別為 x, y, z，則有

$$\begin{cases} x^2+y^2=196 \\ y^2+z^2=256 \\ z^2+x^2=324 \end{cases}$$
，三式相加得 $2(x^2+y^2+z^2)=776$，

即 $x^2+y^2+z^2=388$。所以空間對角線長 $\sqrt{388}=2\sqrt{97}$。

(b) 長方體的空間對角線長等同外接球的直徑。

故該球表面積 $= 4\pi(\sqrt{97})^2 = 388\pi$。

9. 設長方體三邊分別為 a, b, c，不失一般性，

$$\begin{cases} ab=120=2^3\times 3\times 5 \\ bc=72=2^3\times 3^2 \\ ca=60=2^2\times 3\times 5 \end{cases}$$
，三式相乘，$(abc)^2=2^8\times 3^4\times 5^2$，

體積 $= abc = 2^4\times 3^2\times 5 = 720$。

10. 最短路徑必為其展開紙樣中一長方形的對角線長。

為 $\sqrt{(3+4)^2+7^2} = \sqrt{98}$ cm，

或 $\sqrt{(7+3)^2+4^2} = \sqrt{116}$ cm，

或 $\sqrt{(4+7)^2+3^2} = \sqrt{130}$ cm，

故最短路徑為 $\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ cm。

11. 三個正方體的邊長分別為 1, 2, 3。
要得最小總面積，必然使三個正方體以一整面貼一整面的方式的貼合。
而貼合面為較小的正方體的一面的面積的兩倍，
即有兩個 2×2 的面和四個 1×1 的面貼合。
故 a = $6(1^2+2^2+3^2)-4(1^2)-2(2^2)$ = $6\times 14-4-8$ = 72。

12. 設長方體的大小為 $a\times b\times c$，其中 a,b,c 為三個相異的整數。
我們有 $x=(a-2)(b-2)(c-2)$，
$y=2[(a-2)(b-2)+(b-2)(c-2)+(c-2)(a-2)]$，
及 $z=4[(a-2)+(b-2)+(c-2)]$。
令 $p=a-2, q=b-2, r=c-2$。
則 2002 = $x-y+z$
= $pqr-2(pq+qr+rs)+4(p+q+r)$
= $(p-2)(q-2)(r-2)+8$
這裡 p,q,r 為三個相異的整數。
而 1994 = $(p-2)(q-2)(r-2)$。
而 1994 = 2×997。
所以 $(p-2),(q-2),(r-2)$ 分別為 $1,2,997$，
即 p,q,r 分別為 $3,4,999$，而 a,b,c 分別為 $5,6,1001$。
而體積 = $a\times b\times c=5\times 6\times 1001=30030$。

13. 底正六邊形的最長對角線為 $2\times 2\sqrt{3}$ = $4\sqrt{3}$
故高 = $\sqrt{8^2-(4\sqrt{3})^2}$ = $\sqrt{64-48}$ = 4
而底正六邊形的面積 = $6\times\frac{(2\sqrt{3})^2}{2}\times\sin 60^\circ$ = $18\sqrt{3}$
所以體積 = $4\times 18\sqrt{3}$ = $72\sqrt{3}$

14. 側棱長 = $\sqrt{2^2+1^2}$ = $\sqrt{5}$
故所求長度 = $\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\frac{1}{2}\times 2)^2}$ = 2