「嗅！數？」拾例集　　周浩然輯

數論 － 高次不定方程

摘要

1. 本原畢達哥拉斯（Pythagpras）數組（勾股數）：
   即符合 $x^2+y^2=z^2$ 的三元數組 (x,y,z)，
   其中 $(x,y,z)=(u^2-v^2,2uv,u^2+v^2)$，其中 u,v 奇偶性不同。
2. 兩平方和差：
   利用恆等式
   （a） $(a^2\pm b^2)(c^2\pm d^2)=(ac+bd)^2\pm(ad\mp bc)^2$
   （b） $(a^2\pm nb^2)(c^2\pm nd^2)=(ac+nbd)^2\pm n(ad\mp bc)^2$
   表一數為兩整數平方或平方倍數的和或差。
3. 運用同餘法、分離法、分解法解高次不定方程。
4. 簡述以同餘法證不定方程無解。

拾例

1.　求畢氏數組，其中一個數是 18。

答：由於 $18=2\times9=3\times6$，故非本原畢氏數組（3, 4, 5）的六倍，亦符合要求，即（18, 24, 30）

另含有 9 的本原畢氏數組的兩倍，亦符合要求。

令 $u^2-v^2=9$，得 $(u-v)(u+v)=9$，即 $u=5, v=4$。

即 $u^2+v^2=41, 2uv=40$，

即三元數組為（18, 80, 82）。

最後令 $2uv=18$，得 $u=9, v=1$，非一奇一偶。

故只有兩組畢氏數組。

2.　滿足等式 $(x+5)^2+y^2=41$ 的整數組 (x, y) 有多少組？

答：顯然 $\begin{cases}(x+5)^2=16\\ y^2=25\end{cases}$ 或 $\begin{cases}(x+5)^2=25\\ y^2=16\end{cases}$。

每組解的平方根可取正、負，故共有解 $2\times2\times2=8$ 組。

3.　試把 32×90 分拆成兩個完全平方的和。

答：

$$
\begin{aligned}
32 &= 4^2+4^2\\
90 &= 9^2+3^2\\
\text{所以}\quad 32\times90 &= (4^2+4^2)(9^2+3^2)\\
&= (4\times9+4\times3)^2+(4\times9-4\times3)^2\\
&= 48^2+24^2
\end{aligned}
$$

。

4.　若 $59\times43=a^2+2b^2$，求 $a+2b$ 的值。

答：

$$
\begin{aligned}
59 &= 3^2+2\times5^2\\
43 &= 5^2+2\times3^2\\
59\times43 &= (3^2+2\times5^2)(5^2+2\times3^2)\\
&= (3\times5+2\times5\times3)^2+2\times(3\times3-5\times5)^2\\
&= 45^2+2\times16^2
\end{aligned}
$$

即 $a=45, b=16$，所以 $a+2b=45+2\times16=77$。

5. 求 $4x^2 - xy = 20$ 的正數解。

答： 原方程可化成 $y = \dfrac{4x^2 - 20}{x} = 4x - \dfrac{20}{x}$。故 x 為 20 的因子。

取 $x = 1$，$y = 4(1) - \dfrac{20}{1} = -16 < 0$；

取 $x = 2$，$y = 4(2) - \dfrac{20}{2} = -2 < 0$；

取 $x = 4$，$y = 4(4) - \dfrac{20}{4} = 9 > 0$；

取 $x = 5$，$y = 4(5) - \dfrac{20}{5} = 16 > 0$；

取 $x = 10$，$y = 4(10) - \dfrac{20}{10} = 38 > 0$；

取 $x = 20$，$y = 4(20) - \dfrac{20}{20} = 79 > 0$；

所以解為 $(x, y) = (4,9), (5,16), (10,38), (20,79)$。

6. 已知 x, y 為互不相等的正整數，且滿足 $x^3 + 19y = y^3 + 19x$。求 $x^2 + y^2$ 的值。

答： 不失一般性，設 $x > y$

$$x^3 - y^3 = 19x - 19y$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 19(x - y)$$

因為 $x - y \neq 0$，

故得 $x^2 + xy + y^2 = 19$

即 $x^2 + x < 19 < 3x^2$，

故得 $x = 3$。

即 $9 + 3y + y^2 = 19$

$y^2 + 3y - 10 = 0$

解得 $y = 2$ 或 $y = -5$（捨去）。

所以 $x^2 + y^2 = 3^2 + 2^2 = 13$。

7. 求不定方程 $w^2+x^2+y^2+z^2=8(w+x+y+z)$ 的正整數解 (w,x,y,z) 的數目。

答：原式可化為
$$(w^2-8w)+(x^2-8x)+(y^2-8y)+(z^2-8z) = 0$$
$$(w^2-8w+16)+(x^2-8x+16)+(y^2-8y+16)+(z^2-8z+16) = 64$$
$$(w-4)^2+(x-4)^2+(y-4)^2+(z-4)^2 = 64$$

由於 $64=0+0+0+64=0+16+25+25=16+16+16+16$

若 $(a-4)^2=64$，則 $a=12$；

若 $(a-4)^2=25$，則 $a=9$；

若 $(a-4)^2=16$，則 $a=8$；

若 $(a-4)^2=0$，則 $a=4$。

所以 (w,x,y,z) 為 $(4,4,4,12),(4,8,9,9),(8,8,8,8)$ 的排列，

即解數為 $\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{4!}=4+12+1=17$。

8. 求滿足方程 $x^2+2xy+3y^2-2x+y+1=0$ 的所有有序整數對 (x,y)。（中國北京市高中數學競賽 1988）

答：方程化成 $x^2+(2y-2)x+(3y^2+y+1)=0$，

方程有解，即
$$\begin{aligned}\Delta &= (2y-2)^2-4(1)(3y^2+y+1) \ge 0\\ &\quad 4y^2-8y+4-12y^2-4y-4 \ge 0\\ &\quad -8y^2-12y \ge 0\\ &\quad 2y^2+3y \le 0\\ &\quad -\frac{3}{2}\le y\le 0\end{aligned}$$

即有 $y=-1$ 或 $y=0$。

若 $y=-1$，$x^2-2x+3-2x-1+1= x^2-4x+3 = 0$

解得 $x=3$ 或 $x=1$。

若 $y=0$，$x^2-2x+1 = 0$

解得 $x=1$。

所以有序整數對 $(x,y) = (1,-1),(3,-1),(1,0)$。

9. 在 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{1331}$ 的正整數解（x, y）中，求 $x+y$ 的最大值。

答：由於 $\sqrt{1331} = 11\sqrt{11}$。

所以 $x=11a^2, y=11b^2$，a,b 為正整數且 $a+b=11$。

所以由 $(a,b)=(1,10),(2,9),(3,8),\ldots,(10,1)$，

即 $(x,y)=(11,1100),(44,891),(99,704),\ldots,(1100,11)$，

$x+y$ 的最大值為 $1100+11=1111$。

10. 在 $\sqrt{x}+2\sqrt{y}=\sqrt{1331}$ 的正整數解（x, y）中，求 $x+2y$ 的最小值。

答： 由於 $\sqrt{1331}=11\sqrt{11}$。

所以 $x=11a^2, y=11b^2$，a,b 為正整數且 $a+2b=11$。

所以由 $(a,b)=(1,5),(3,4),(5,3),(7,2),(9,1)$，

即 $(x,y)=(11,275),(99,176),(275,99),(539,44),(891,11)$，

$x+2y$ 的最小值為 $99+2\times176=451$。

一個人的學識增長應從出生開始，

至死亡終止。

Intellectual growth should commence at birth and cease only at death.

美國理論物理學家

愛因斯坦

(Albert Einstein 1879-1955)

淺問

1. 若本原畢氏數的其中一數為 x ，求符合要求的所有三元數組。
(a) $x=5$ (b) $x=12$ (c) $x=13$

2. 若直角 ΔABC 的其中一條邊為 60，求符合要求的所有三角形的三邊長度。

3. 若整邊直角三角形的其中一直角邊為 35，求該三角形的周界的最大值與最小值。

4. 已知 $\sqrt{\frac{50+120+130}{2}\times(150-50)\times(150-120)\times(150-130)}=\frac{50\times130\times k}{2}$ 。若 $t=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$ ，求 t 的值。（HKMO 2006/07 決賽團體）

5. 把下列各數表示成兩正整數之平方之和：
(a) 34×37 (b) 40×41 (c) 61×74

6. 若 $187^2=a^2+2b^2$ ，求 $a+2b$ 的值。

7. 已知方程 $x+6+8k=k(x+8)$ 有正整數解。求 k 的最小值。
(HKMO 1994/95 決賽個人)

8. 有多少組四元整數組滿足 $0<a<b<c<d$ 及 $a+d=b+c$ 及 $bc-ad=93$ 。（AIME 1993）

9. 求不定方程 $2x^2-5xy+2y^2+x-2y-6=0$ 的所有整數解。

10. 求不定方程 $x^2+y^2=5(x+y)$ 的正整數解 (x,y) 的組數。

11. 若 x,y 為整數，求方程 $(x-8)(x-10)=2^y$ 的解的個數。（AHSME 1962）

12. 已知 x,y 為正整數，且 $x>y$ ，解 $x^3=2189+y^3$ 。
(HKMO 2011/12 初賽個人)

13. 求方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{336}$ 的整數解（x, y）的組數。
（中國北京市初二數學競賽 1993）

詳答

1. (a) 若 $u^2-v^2=5$，得 $\begin{cases}u+v=5\\u-v=1\end{cases}$，即 $u=3,v=2$。

$u^2+v^2=3^2+2^2=13$ $2uv=2(3)(2)=12$ 故三邊為 5-12-13。

若 $u^2+v^2=5$，得 $u=2,v=1$。

$u^2-v^2=2^2-1^2=3$ $2uv=2(1)(2)=4$ 故三邊為 3-4-5。

(b) 令 $2uv=12$，得 $u=3,v=2$

$u^2+v^2=3^2+2^2=13$ $u^2-v^2=3^2-2^2=5$ 故三邊為 5-12-13。

(c) 若 $u^2-v^2=13$，得 $\begin{cases}u+v=13\\u-v=1\end{cases}$，即 $u=7,v=6$。

$u^2+v^2=7^2+6^2=85$ $2uv=2(7)(6)=84$ 故三邊為 13-84-85。

若 $u^2+v^2=13$，得 $u=3,v=2$。

$u^2-v^2=3^2-2^2=5$ $2uv=2(3)(2)=12$ 故三邊為 5-12-13。

2. $60=1\times60=2\times30=3\times20=4\times15=5\times12=6\times10$，

由於 30、10 不是 4 的倍數，再由於 15 是 4N-1 型，

故只考慮 1×60、3×20 和 5×12 三個情況。

令 $60=2uv$ 得

$u=30,v=1$ 或 $u=15,v=2$ 或 $u=10,v=3$ 或 $u=6,v=5$

取 $u=30,v=1$ $u^2+v^2=901$，$u^2-v^2=899$

故三邊為 60-899-901。

取 $u=15,v=2$ $u^2+v^2=229$，$u^2-v^2=221$

故三邊為 60-221-229。

取 $u=10,v=3$ $u^2+v^2=109$，$u^2-v^2=91$

故三邊為 60-91-109。

取 $u=6,v=5$ $u^2+v^2=61$，$u^2-v^2=11$

故三邊為 11-60-61。

令 $20=2uv$ 得 $u=10,v=1$ 或 $u=5,v=2$

取 $u=10,v=1$ $u^2+v^2=101$，$u^2-v^2=99$

故三邊為 60-297-303。

取 $u=5,v=2$ $u^2+v^2=29$，$u^2-v^2=21$

故三邊為 60-63-87。

令 $12=2uv$ 得 $u=3,v=2$

取 $u=3,v=2$ $u^2+v^2=13$，$u^2-v^2=5$

故三邊為 60-144-156。

3. 令直角三角形的其餘兩邊為 a, b。

$$35^2+a^2=b^2 \text{，即 } 1225=(a+b)(a-b)$$

由於另外兩邊的和必大於 35 ，所以觀察 1225 中大於 35 的正因子，該因子便是 $a+b$。

檢視得最大值為 1225，最小值為 49。

所以周界，即 $a+b+c=1225+35=1260$ 或 $a+b+c=49+35=84$。

4. 由於 $\dfrac{50+120+130}{2}=150$，再加上（50, 120, 130）為畢氏數組，

所以原根式為一直角三角形的面積同等於 $\dfrac{50\times120}{2}$，

所以得 $k=\dfrac{120}{130}=\dfrac{12}{13}$，$t=\dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}=\dfrac{\frac{12}{13}}{\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}}=\dfrac{12}{5}$。

5. (a)

$$\begin{aligned}
34 &= 3^2+5^2\\
37 &= 1^2+6^2\\
34\times37 &= (3^2+5^2)(1^2+6^2)\\
&= (3\times1+5\times6)^2+(3\times6-5\times1)^2\\
&= 33^2+13^2
\end{aligned}$$

（註： 此題答案不是唯一的。）

(b)

$$\begin{aligned}
40 &= 2^2+6^2\\
41 &= 4^2+5^2\\
40\times41 &= (2^2+6^2)(4^2+5^2)\\
&= (2\times4+6\times5)^2+(2\times5-6\times4)^2\\
&= 38^2+14^2
\end{aligned}$$

（註： 此題答案不是唯一的。）

(c)

$$\begin{aligned}
61 &= 5^2+6^2\\
74 &= 5^2+7^2\\
61\times74 &= (5^2+6^2)(5^2+7^2)\\
&= (5\times5+6\times7)^2+(5\times7-6\times5)^2\\
&= 67^2+5^2
\end{aligned}$$

（註： 此題答案不是唯一的。）

6. $187 = 13^2+2\times 3^2 = 5^2+2\times 9^2$

所以 $187^2 = 187\times 187 = (13^2+2\times 3^2)(5^2+2\times 9^2)$

$= (13\times 5+2\times 3\times 9)^2+2\times(13\times 9-3\times 5)^2$

$= 119^2+2\times 102^2$

即 $a=119, b=102$，所以 $a+2b=119+2\times 102=323$。

7. $x+6+8k = kx+8k$

$kx-x = 6$

$x = \dfrac{6}{k-1}$

因方程有正整數解，故 $k-1$ 為 6 的正因子，

即 $k-1=1,2,3,6$，故取 k 的最小值為 2。

8. 設 $k=a+d=b+c$，所以 $d=k-a, b=k-c$。

即 $(k-c)c-(k-a)a = 93$

$a^2-c^2-ka+kc = 93$

$(a-c)(a+c)-k(a-c) = 93$

$(a-c)(a+c-k) = 93$

$(c-a)(d-c) = 93$

由此， $((c-a),(d-c)) = (1,93),(3,31),(31,3),(93,1)$

解得 $(a,b,c,d) = (c-93,c-92,c,c+1)$ 或 $(c-31,c-28,c,c+3)$

或 $(c-3,c+28,c,c+31)$ 或 $(c-1,c+92,c,c+93)$

四個解中，僅前兩者符合題意。

若取 $(c-93,c-92,c,c+1)$，即得 $c-93>0$ 及 $c+1<500$，

即 $93<c<499$，得 $94\le c\le 498$，

合共有解 $498-94+1=405$ 個。

若取 $(c-31,c-28,c,c+3)$，即得 $c-31>0$ 及 $c+3<500$，

即 $31<c<497$，得 $92\le c\le 496$，

合共有解 $496-32+1=465$ 個。

所以總共有解 $405+465=870$。

9. $(2x-y)(x-2y)+(x-2y) = 6$

$(x-2y)(2x-y+1) = 6$

解得 $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y+1=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=2 \\ 2x-y+1=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-y+1=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=6 \\ 2x-y+1=1 \end{cases}$

或 $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x-y+1=-6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=-2 \\ 2x-y+1=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x-y+1=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=-6 \\ 2x-y+1=-1 \end{cases}$

但有整數解的僅有：

$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y+1=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=6 \\ 2x-y+1=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=-2 \\ 2x-y+1=-3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2y=-3 \\ 2x-y+1=-2 \end{cases}$

得 $(x,y)=(3,1),(-2,-4),(-2,0),(-1,1)$ 。

10. 原式可化為 $(x^2-5x)+(y^2-5y) = 0$

$(x^2-5x+\frac{25}{4})+(y^2-5y+\frac{25}{4}) = \frac{25}{2}$

$(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2 = \frac{25}{2}$

$(2x-5)^2+(2y-5)^2 = 50$

由於 $50=1+49=25+25$

若取 $(2a-5)^2=1$，則 $a=2,3$；

若取 $(2a-5)^2=25$，則 $a=5$；

若取 $(2a-5)^2=49$，則 $a=6$ 。

故 (x,y) 為 $(2,6),(3,6),(5,5)$ 的排列，解數為 $2+2+1=5$ 。

11. $x^2-18x+(80-2^y) = 0$

解得 $x = \dfrac{18\pm\sqrt{18^2-4\times1\times(80-2^y)}}{2}$

$= \dfrac{18\pm\sqrt{4+4\times2^y}}{2}$

$= 9\pm\sqrt{1+2^y}$

由此令 $1+2^y=n^2$ ，即 $2^y=(n-1)(n+1)$ 。

由此 $n-1,n+1$ 是連續偶數，故 $n=\pm3$ 。

對應的解 $(x,y) =$ （6, 3），（12, 3）合兩解。

12. $$x^3-y^3 = 2189$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 11\times 199$$
$$(x-y)[(x-y)^2+3xy] = 11\times 199$$
即考慮 $\begin{cases} x-y=11 \\ (x-y)^2+3xy=199 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x-y=11 \\ xy=26 \end{cases}$，解得 $(x,y)=(13,2)$

再考慮 $\begin{cases} x-y=1 \\ (x-y)^2+3xy=2189 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x-y=1 \\ xy=\dfrac{2188}{3} \end{cases}$，由於 2188 不是 3 的倍數，故無正整數解。所以答案只有 $(x,y)=(13,2)$。

13. 由於 $\sqrt{336}=4\sqrt{21}$，
所以 $x=21a^2, y=21b^2$，a,b 為正整數且 $a+b=4$。
所以由 $(a,b)=(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)$，合共有 5 個解。

凡在小事上對真理持輕率態度的人，
在大事上也是不足信的。

美國理論物理學家
愛因斯坦
(Albert Einstein 1879-1955)