# 「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

# 組合 – 集合論與容斥原理

## 摘要

1. 認識各樣的集合表示法，包括列舉法和描述法。
   (a) 列舉法例子：　$A=\{1,2,3,\ldots\}$
   (b) 描述法例子：　$B=\{x \mid x^2+2x-3=0\}$
2. 元素的確定性、互異性和無序性的基本性質：
   (a) 確定性：　即任何一個對象均能確切地表示屬於或不屬於某一特定的集合。
   (b) 互異性：　即集合中的元素都互不相同，互不重覆。
   (c) 無序性：　即集合中的元素排列與順序無關。
3. 元素與集的關係只有屬於($\in$) 或不屬於($\notin$)。
4. 兩集關係有：
   (a) $A\subseteq B$：　即對 A 的任何元素 a 均有 $a\in B$。
   我們稱 A 為 B 的子集。
   (b) $A\subset B$：　即對 A 的任何元素 a 均有 $a\in B$。
   且存有至少一個 $b\in B, b\notin A$。
   我們稱 A 為 B 的真子集。

   若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$ 則 $A=B$。
   空集 $\phi$ 為任何一個集合的子集。
5. 集合的運算：
   (a) 交集：　$A\cap B=\{x \mid x\in A \quad and \quad x\in B\}$
   (b) 并集：　$A\cup B=\{x \mid x\in A \quad or \quad x\in B\}$
   (c) 補集：　$\overline{A}=\{x \mid x\notin A \quad x\in S \quad A\subseteq S\}$
6. 認識映射、單射、滿射、雙射定義。
   (a) 單射：　對於所有 $a_1\neq a_2$ 則有 $\varphi(a_1)\neq\varphi(a_2)$。
   (b) 滿射：　對於每個 $b\in B$，都存在某個 $a\in A$ 使 $\varphi(a)=b$。
   (c) 雙射：　滿足單射和滿射的條件。
7. 認識容斥原則及其於倍數數與集合個數上的應用。
8. 利用等差數列的總和公式，計算範圍某些數的倍數總和。

# 拾例

1. 已知集合 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$、$A=\{1,2,3,7,8,9\}$、$B=\{4,5,6,7,8,9\}$

   (a) $A\cap B$
   (b) $A\cup B$
   (c) $\overline{A}\cap\overline{B}$
   (d) $\overline{A\cup B}$

答：
(a) $A\cap B = \{7,8,9\}$。
(b) $A\cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。
(c) $\overline{A}\cap\overline{B} = \{4,5,6,0\}\cap\{1,2,3,0\} = \{0\}$。
(d) $\overline{A\cup B} = \overline{\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}} = \{0\}$。

2. 已知集合 $M=\{x\mid 3x-6\le 0\}$，$N=\{x\mid 4x\ge 8\}$，求 $M\cap N$。

答：由 $3x-6\le 0$，得 $x\le 2$。
由 $4x\ge 8$，得 $x\ge 2$。
而 $M\cap N = \{2\}$。

3. 定義集合運算 $A\otimes B=\{z\mid z=a+b, a\in A, b\in B\}$。若 $A=\{3,4\}, B=\{1,2,3\}$，求 $A\otimes B$ 的所有元素之和。

答：$A\otimes B=\{4,5,6,7\}$，故所有元素之和為 $4+5+6+7=22$。

4. 在 $\{1,2,3,...,10\}$ 中有多少個子集至少含有一個元素為奇數？

答：在 $\{2,4,6,8,10\}$ 的子集沒有元素為奇數，故組合數目為 $2^{10}-2^5=992$。

5. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax-by^2+3=0\}$，$B=\{(x,y)\mid ax^2-by=0\}$。若 $(1,-2)\in A\cap B$，求 $a+b$ 的值。

答：依題意，得 $(1,-2)\in A$ 及 $(1,-2)\in B$，即

$$\begin{cases} a-4b+3=0 \\ a+2b=0 \end{cases},$$

解出 $a=-1, b=\frac{1}{2}$，$a+b=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$。

6. 已知集合 $A=\{1,5,x\}$，$B=\{x^2,1\}$。若 $B\subset A$，求實數 x 的可能取值數目。

答：依題意，得 $x^2=x$ 或 $x^2=5$，但 $x\ne 1$。即得解 $x=0,\pm\sqrt{5}$，
故實數 x 的可能取值數目為 3 。

7. 設 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$。問

(a) 從 A 到 B 的映射共有多少個？

(b) 從 B 到 A 的映射共有多少個？

答：(a) 從 A 到 B 的映射共有 $2^5=32$ 個。

(a) 從 B 到 A 的映射共有 $5^2=25$ 個。

8. 求小於 1000 而不能被 5 和 7 整除的正整數的個數。
(MMO 1938, AHSME 1966)

答：在 1 至 999 之間有 5 的倍數 $\frac{999}{5}=199...4$，即 199 個。

在 1 至 999 之間有 7 的倍數 $\frac{999}{7}=142...5$，即 142 個。

在 1 至 999 之間有 35 的倍數 $\frac{999}{35}=28...19$，即 28 個。

所以跟據容斥原理，符合要求的整數個數為 $999-199-142+28$
= 686 個。

9. 已知 n 為一小於 1000 的正整數。若 n 不能被 5 或 7 整除，求 n 之可能數值的總和。

答：在 1 至 999 之間有 5 的倍數 $\left[\frac{999}{5}\right]=199$ 個。

其總和 = $5(+2+3+...+199)$ = $5\times\frac{199\times 200}{2}$
= 99500。

在 1 至 999 之間有 7 的倍數 $\left[\frac{999}{7}\right]=142$ 個。

其總和 = $7(1+2+3+...+142)$ = $7\times\frac{142\times 143}{2}$
= 71071。

在 1 至 999 之間有 35 的倍數 $\left[\frac{999}{35}\right]=28$ 個。

其總和 = $35(1+2+3+...+28)$ = $35\times\frac{28\times 29}{2}$
= 14210。

所有數總和為 = $1+2+3+...+999$ = $\frac{999\times 1000}{2}$
= 499500。

所以跟據容斥原理，
n 之可能數值總和為 $499500-99500-71071+14210=343139$ 個。

10. 已知 n 為一小於 1000 的正整數。若 n 能被 5 或 7 或 11 整除，求 n 之可能數值有多少個。

答： 在 1 至 999 之間有 5 的倍數 $\left[\dfrac{999}{5}\right]=199$ 個。

在 1 至 999 之間有 7 的倍數 $\left[\dfrac{999}{7}\right]=142$ 個。

在 1 至 999 之間有 11 的倍數 $\left[\dfrac{999}{11}\right]=90$ 個。

在 1 至 999 之間有 35 的倍數 $\left[\dfrac{999}{35}\right]=28$ 個。

在 1 至 999 之間有 55 的倍數 $\left[\dfrac{999}{55}\right]=18$ 個。

在 1 至 999 之間有 77 的倍數 $\left[\dfrac{999}{77}\right]=12$ 個。

在 1 至 999 之間有 385 的倍數 $\left[\dfrac{999}{385}\right]=2$ 個。

所以跟據容斥原理，
n 之可能數值有 $199+142+90-28-18-12+2=375$ 個。

在數學的領域中，提出問題的藝術
比解答問題的藝術更爲重要。

德國數學家
康托爾
(Georg Cantor 1845-1918)

# 淺問

1. 試以數式表示下列集合：
   (a) 所有奇數　　(b) 所有正偶數
   (c) 所有純虛數　　(d) 以 3 為分母的所有分數

2. 若 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$、$A=\{1,2,3,4\}$ 及 $B=\{2,4,6,7\}$，求
   (a) $A\cup B$　　(b) $A\cap B$
   (c) $\overline{A}\cup\overline{B}$　　(d) $\overline{A\cap B}$

3. 定義集合運算：$A\otimes B=\{z\mid z=xy, x\in A, y\in B\}$，設 $A=\{2,0\}, B=\{0,8\}$，求集合 $A\otimes B$ 的所有元素之和。（湖南省高中數學競賽 2008）

4. 已知集合 $A=\{a,a^2,ab\}$，$B=\{1,a,b\}$，其中 $a,b\in R$。現 A=B，求 $a^{2011}+b^{2011}$ 的值。

5. 集合 $S=\{1,2,3,4,5\}$，若 A、B 均為 S 的子集且 $A\cup B=S$，問子集 A 和 B 共有多少種不同的組合？

6. 集合 A 有十個元素，其子集 B 有六個元素。問有多少個 A 的子集包含 B。（FWMT-C 2003）

7. (a) 求 1 至 1000 之間（包括 1 及 1000），是 2 的倍數或 3 的倍數的整數的數目。
   (b) 求 1 至 1000 之間（包括 1 及 1000），所有是 2 的倍數或 3 的倍數的整數的總和。

8. (a) 求 1 至 100 之間（包括 1 及 100），不是 2 的倍數，不是 3 的倍數，又不是 5 的倍數的整數的數目。
   (b) 求 1 至 100 之間（包括 1 及 100），所有不是 2 的倍數，不是 3 的倍數，又不是 5 的倍數的整數的總和。

9. 自 1 至 2000 之間（包括 1 及 2000），是完全平方數或是完全立方數的整數有多少個？

10. 把所有 3 的倍數或 5 的倍數或 7 的倍數，由小至大自左列寫至右，如 3, 5, 6, 7, 9, …… 問第 2011 數是多少？

# 詳答

1.　(a)　$\{x = 2k - 1 \mid k \in Z\}$
　(b)　$\{x = 2k \mid k \in Z^+\}$
　(c)　$\{x = \sqrt{-k} \mid k \in R^+\}$
　(d)　$\{x = \frac{k}{3} \mid k \in Z\}$

2.　(a)　$A \cup B$ =　{1, 2, 3, 4, 6, 7}
　(b)　$A \cap B$ =　{2, 4}
　(c)　$\overline{A} \cup \overline{B}$ =　$\{5,6,7,8\} \cup \{1,3,5,8\}$　=　{1, 3, 5, 6, 7, 8}
　(d)　$\overline{A \cap B}$ =　$\overline{\{2,4\}}$　=　{1, 3, 5, 6, 7, 8}

3.　$A \otimes B = \{0,16\}$，故所有元素之和為 0 + 16 = 16。

4.　由於 A=B ，故兩集合間的元素實一一對應，即 $ab$ 及 $a^2$ 對 1 及 b，得
$\begin{cases} ab + a^2 = 1 + b \\ ab \times a^2 = 1 \times b \end{cases}$，即 $\begin{cases} a(a+b) = 1 + b \\ b(a^3 - 1) = 0 \end{cases}$。但由於 $a \neq 0,1$，由下式可得
$b = 0$。代入上式，得 $a^2 = 1$，即 $a = -1$。
故 $a^{2011} + b^{2011}$　=　$(-1)^{2011} + 0^{2011}$　=　$-1$。

5.　集合 S 的子集 A 和 B 滿足 $A \cup B = S$，即對任一元素 x 有三種可能性：
(a)　$x \in A$；(b)　$x \in B$ 或 (c)　$x \in A \cap B$。但另一方面，除 $A = B = S$ 外，其餘的均有對稱性。故組合數目為 $\frac{3^5 - 1}{2} + 1$　=　122。

6.　包含 B 的 A 的子集至少有六個元素，其餘四個元素可有可無。
故子集個數　=　$2^4$　=　16。

7. (a) 在 1 至 1000 之間有 2 的倍數 $\frac{1000}{2}=500$ 個。

在 1 至 1000 之間有 3 的倍數 $\frac{1000}{3}=333\frac{1}{3}$ ，即有 333 個。

在 1 至 1000 之間有 6 的倍數 $\frac{1000}{6}=166\frac{1}{3}$ ，即有 166 個。

所以跟據容斥原理，指定整數數目有 $500+333-166$

= 667 個。

(b) 在 1 至 1000 之間所有 2 的倍數的總和為

$2(1+2+3+...+500) = 2\times\frac{500(500+1)}{2}$

= 250500。

在 1 至 1000 之間所有 3 的倍數的總和為

$3(1+2+3+...+333) = 3\times\frac{333(333+1)}{2}$

= 166833。

在 1 至 1000 之間所有 6 的倍數的總和為

$6(1+2+3+...+166) = 6\times\frac{166(166+1)}{2}$

= 83166。。

跟據容斥原理，所求的總和為 = 250500 + 166833 – 83166

= 334167。

8. (a) 在 1 至 100 之間有 2 的倍數 $\frac{100}{2}=50$ 個。

在 1 至 100 之間有 3 的倍數 $\frac{100}{3}=33\frac{1}{3}$ ，即有 33 個。

在 1 至 100 之間有 5 的倍數 $\frac{100}{5}=20$ 個。

在 1 至 100 之間有 6 的倍數 $\frac{100}{6}=16\frac{2}{3}$ ，即有 16 個。

在 1 至 100 之間有 10 的倍數 $\frac{100}{10}=10$ 個。

在 1 至 100 之間有 15 的倍數 $\frac{100}{15}=6\frac{2}{3}$ ，即有 6 個。

在 1 至 100 之間有 30 的倍數 $\frac{100}{30}=3\frac{1}{3}$ ，即有 3 個。

跟據容斥原理，指定整數數目有 $100-(50+33+20-16-10-6+3)$

$= 100-103+32-3 = 26$ 個。

(b) 在 1 至 100 之間所有整數的總和為

$1+2+3+...+100 = \frac{100(100+1)}{2} = 10100$

在 1 至 100 之間所有 2 的倍數的總和為

$2(1+2+3+...+50) = 2\times\frac{50(50+1)}{2} = 2550$。

在 1 至 100 之間所有 3 的倍數的總和為

$3(1+2+3+...+33) = 3\times\frac{33(33+1)}{2} = 1683$。

在 1 至 100 之間所有 5 的倍數的總和為

$5(1+2+3+...+20) = 5\times\frac{20(20+1)}{2} = 1050$。

在 1 至 100 之間所有 6 的倍數的總和為

$6(1+2+3+...+16) = 6\times\frac{16(16+1)}{2} = 816$。

在 1 至 100 之間所有 10 的倍數的總和為

$10(1+2+3+...+10) = 10\times\frac{10(10+1)}{2} = 550$。

在 1 至 100 之間所有 15 的倍數的總和為

$15(1+2+3+...+6) = 16\times\frac{6(6+1)}{2} = 315$。

在 1 至 100 之間所有 30 的倍數的總和為 $30+60+90 =180$。

所以的總和為 $10100-(2550+1683+1050-816-550-315+180)$

$= 10100-5283+1681-180 = 6318$。

9. 自 1 至 2000 之間，有完全平方數 $\sqrt{2000}\approx 44$ 個，
完全立方數有 $\sqrt[3]{2000}\approx 12$ 個，完全六次方數則有 $\sqrt[6]{2000}\approx 3$ 個。
跟據容斥原理，指定整數數目有 44 + 12 − 3 = 51 個。

10. 選取 1 至 $3\times 5\times 7=105$ 間，數算符合要求的整數個數。
當中有 3 的倍數 $5\times 7=35$ 個，同理有 5 的倍數 21 個、
7 的倍數 15 個、 15 的倍數 7 個、21 的倍數 5 個、
35 的倍數 3 個和 105 的倍數 1 個。
即符合要求的數目有 $35+21+15-7-5-3+1$ = 57 個。
由於 $2011=35\times 57+17$，故須列寫至 $35\times 105=3675$ 後再列寫 17 個數，
該 17 個數為：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3675+3, | 3675+5, | 3675+6, | 3675+7, | 3675+9, |
| 3675+10, | 3675+12, | 3675+14, | 3675+15, | 3675+18, |
| 3675+20, | 3675+21, | 3675+24, | 3675+25, | 3675+27, |
| 3675+28, | 3675+30 | | | |

故以第 2011 個數為 $3675+30=3705$。

數學的本質在於它的自由。

德國數學家
康托爾
(Georg Cantor *1845-1918*)