「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

代數 － 分解多項式

摘要

1. 運用添項、拆項、配方、換元等方法來分解高次式。
2. 以待定系數法來分解二元二次函數
   若 $ax^2+bcy+cy^2=(px+qy)(rx+sy)$，
   則令 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=(px+qy+m)(rx+sy+n)$，
   再以比較系數的方法，解出 m,n。
3. 利用分解方法解高次方程。
4. 解雙二次方程 $a[f(x)]^2+bf(x)+c=0$，其中 $f(x)$ 為二次方程。
5. 解倒數方程：
   (a) $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$，
   化成 $a(x+\frac{1}{x})^2+b(x+\frac{1}{x})+(c-2a)=0$，再行求解。
   (b) $ax^4+bx^3+cx^2-bx+a=0$，
   化成 $a(x-\frac{1}{x})^2+b(x-\frac{1}{x})+(c-2a)=0$，再行求解。
   (c) $ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0$，
   因其中一根為 $x=-1$，除以因子 $x+1$，再行求解。
   (d) $ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$，
   因其中一根為 $x=1$，除以因子 $x-1$，再行求解。
   (e) $ax^6+bx^5+cx^4-cx^2-bx-a=0$，
   因其中兩根為 $x=\pm1$，除以因子 x^2-1，再行求解。

拾例

1. 分解因式 $x^{15}+x^{14}+x^{13}+\ldots+1$ 。

答： 原式 $= \dfrac{x^{16}-1}{x-1} = \dfrac{(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}$

$= (x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)$ 。

2. 因式分解 a^4+4 。（中國北京市中學生數學競賽 2002 初二初賽）

答： 原式 $= a^4+4a^2+4-4a^2 = (a^2+2)^2-(2a)^2$

$= (a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$ 。

3. 因式分解 x^3-7x+6 。

答： 解法一：

$$\begin{aligned} x^3-7x+6 &= x^3-x-6x+6 = x(x-1)(x+1)-6(x-1) \\ &= (x-1)[x(x+1)-6] = (x-1)(x^2+x-6) \\ &= (x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

解法二：

$$\begin{aligned} x^3-7x+6 &= x^3-x^2+x^2-7x+6 \\ &= x^2(x-1)+(x-1)(x-6) \\ &= (x-1)(x^2+x-6) = (x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

解法三：

$$\begin{aligned} x^3-7x+6 &= x^3-1-7x+7 = (x-1)(x^2+x+1)-7(x-1) \\ &= (x-1)(x^2+x+1-7) \\ &= (x-1)(x^2+x-6) = (x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

解法四：

$$\begin{aligned} x^3-7x+6 &= x^3-2x^2+2x^2-7x+6 \\ &= x^2(x-2)+(2x-3)(x-2) \\ &= (x-2)(x^2+2x-3) \\ &= (x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

4.　因式分解 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$。

答：
$$
\begin{aligned}
& (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24 \\
= & [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)]-24 \\
= & (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24 \\
= & (x^2+5x)+10(x^2+5x) \\
= & (x^2+5x)(x^2+5x+10) \\
= & x(x+5)(x^2+5x+10)
\end{aligned}
$$
。

5.　因式分解 $x^2-2xy-3y^2+2x+10y-8$。

答：設 $x^2-2xy-3y^2+2x+10y-8 = (x-3y+a)(x+y+b)$

比較系數得：$\begin{cases} a+b=2 \\ a-3b=10 \\ ab=-8 \end{cases}$，解聯立方程得 $a=4, b=-2$。

即 $x^2-2xy-3y^2+2x+10y-8=(x-3y+4)(x+y-2)$。

6.　解方程 $x+x^2+x^3+x^4+x^5=5x^3$。

答：
$$
\begin{aligned}
x+x^2-4x^3+x^4+x^5 &= 0 \\
x(1+x-4x^2+x^3+x^4) &= 0
\end{aligned}
$$

$x=0$ 或
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-4+x+x^2 &= 0 \\
(\frac{1}{x^2}+x^2)+(\frac{1}{x}+x)-4 &= 0 \\
(\frac{1}{x}+x)^2+(\frac{1}{x}+x)-6 &= 0
\end{aligned}
$$

$x+\frac{1}{x}-2=0$ 或 $x+\frac{1}{x}+3=0$

$x^2-2x+1=0$ 或 $x^2+3x+1=0$

$x=1$ 或 $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

所以 $x=0,1,\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$。

7. 求方程 $2x^5-x^4-4x^3-4x^2-x+2=0$ 的所有實數根之和。

答： 顯然 $x=-1$ 為其中一實根，故方程可改寫成

$$(x+1)(2x^4-3x^3-x^2-3x+2)=0$$

若 $x\neq-1$，則有

$$2x^2-3x-1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2(x^2+\frac{1}{x^2})-3(x+\frac{1}{x})-1=0$$

$$2(x+\frac{1}{x})^2-3(x+\frac{1}{x})-5=0$$

$$(x+\frac{1}{x}+1)[2(x+\frac{1}{x})-5]=0$$

$x^2+x+1=0$ 或 $2x^2-5x+2=0$

沒有實根 或 $x=2,\frac{1}{2}$。

故此方程共有三個實根，實根之和為 $2+\frac{1}{2}-1=\frac{3}{2}$。

8. 求方程 $x^4-3x^2+1=0$ 的最小實根。

答：

$$x^4-2x^2+1-x^2 \quad 0$$

$$(x^2-1)^2-x^2=0$$

$$(x^2-x-1)(x^2+x-1)=0$$

$x^2-x-1=0$ 或 $x^2+x-1=0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 或 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

故最小實根為 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$。

9. 已知 x 是實數，且滿足 $\frac{3}{x^2+2x}-x^2-2x=2$，求 x^2+2x 的值。

（中國河南省初三數學競賽 2003）

答： 設 $y=x^2+2x$，原式化成 $\frac{3}{y}-y-2=0$，即 $y^2+2y-3=0$。

解得 $y=-3$ 或 $y=1$。但由於 $x^2+2x=-3$ 沒有實根。

所以答案為 1。

10. 求方程 $5x^2-3xy+\frac{1}{2}y^2-2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}=0$ 的實數解。

答：

$$
\begin{aligned}
20x^2-12xy+2y^2-8x+2y+1 &= 0\\
20x^2+(-12y-8)x+(2y^2+2y+1) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta = (-12y-8)^2-4(20)(2y^2+2y+1) &\geq 0\\
144y^2+192y+64-160y^2-160y-80 &\geq 0\\
-16y^2+32y-16 &\geq 0\\
-16(y-1)^2 &\geq 0\\
(y-1)^2 &\leq 0
\end{aligned}
$$

故得解 $y=1$。

代入原式，得

$$
\begin{aligned}
20x^2-12x+2-8x+2+1 &= 0\\
20x^2-20x+5 &= 0\\
(2x-1)^2 &= 0
\end{aligned}
$$

解得 $x=\frac{1}{2}$。

即唯一實解為 $(x,y)=(\frac{1}{2},1)$。

別把數學想像得那麼困難和艱澀，
認為它排斥常識，
數學僅僅是常識的一種微妙的形式。

英國數學家、物理學家

開爾文 (Lord Kelvin 1824-1907)

淺問

1. 因式分解 $2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2-y^2)^2$。

2. 試用兩種不同的添拆項方法因式分解 $2x^3-3x^2-5x+6$。

3. 因式分解下列各式：
   (a) x^5+x+1　　(b) $x^8+x^6+x^4+x^2+1$

4. 分解 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+5x^6+4x^7+3x^8+2x^9+x^{10}$。

5. 分解 $xy(xy+1)+(xy+3)-2(x+y+\frac{1}{2})-(x+y-1)^2$。

6. 解下列方程
   (a) $(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$
   (b) $(x^2+19x)^2-408(x^2+19x)-124848=0$

7. 若四個連續正整數的乘積為 3024，求其中最大的一個。
   (HKMO 1992/93 初賽團體)

8. 求下列雙二次方程的所有實數解：
   (a) $x^4+x^2-6=0$　　(b) $x^4-6x^2+1=0$

9. 求方程 $x^2+3x-\frac{3}{x^2+3x-7}=9$ 的全部實根的乘積。

10. 求下列倒數方程的所有實數解：
    (a) $2x^5-7x^4+5x^3+5x^2-7x+2=0$
    (b) $6x^4-25x^3+12x^2+25x+6=0$

11. 若 a^2+2a+5 是 a^4+ma^2+n 的一個因式，求 mn 的值。

12. 分解下列二次方程：
    (a) $x^2-2x-2y^2+4y-xy$（中國重慶市初二數學競賽 2004）
    (b) $9x^2-6x-y^2+4y-3$（中國河南省初三數學競賽 2003）

13. 若 $x^2-xy-12y^2+3x+ky-10$ 可以分解成兩道一次式，求 k 的最大值。

詳答

1. $$2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2-y^2)^2$$
$$= 2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x+y)^2(x-y)^2$$
$$= (x+y)^2(2x^2+2y^2-x^2+2xy-y^2)$$
$$= (x+y)^2(x^2+2xy+y^2)$$
$$= (x+y)^2(x+y)^2 \quad = \quad (x+y)^4$$

2. 解法一：
$$\begin{aligned}2x^3-3x^2-5x+6 &= 2x^3-2x^2-x^2-5x+6\\ &= (2x^3-2x^2)-(x^2+5x-6)\\ &= 2x^2(x-1)-(x-1)(x+6)\\ &= (x-1)(2x^2-x-6)\\ &= (x-1)(x-2)(2x+3)\end{aligned}$$

解法二：
$$\begin{aligned}2x^3-3x^2-5x+6 &= 2x^3-2x-3x^2-3x+6\\ &= 2x(x^2-1)-3(x^2+x-2)\\ &= 2x(x-1)(x+1)-3(x-1)(x+2)\\ &= (x-1)[2x(x+1)-3(x+2)]\\ &= (x-1)(2x^2-x-6)\\ &= (x-1)(x-2)(2x+3)\end{aligned}$$

解法三：
$$\begin{aligned}2x^3-3x^2-5x+6 &= 2x^3-2-3x^2-5x+8\\ &= 2(x^3-1)-(3x^2+5x-8)\\ &= 2(x-1)(x^2+x+1)-(x-1)(3x+8)\\ &= (x-1)[2(x^2+x+1)-(3x+8)]\\ &= (x-1)(2x^2-x-6)\\ &= (x-1)(x-2)(2x+3)\end{aligned}$$

3. (a) $x^5+x+1 = x^5-x^2+x^2+x+1$

$= x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$

$= x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$= (x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]$

$= (x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$

(b) 留意 $(a^4+a^3+a^2+a+1)(a-1) = a^5-1$

以 −a 代換 a，

$(a^4-a^3+a^2-a+1)(-a-1) = -a^5-1$

$(a^4-a^3+a^2-a+1)(a+1) = a^5+1$

以 x^2 代換 a，

所以 $(x^8+x^6+x^4+x^2+1)(x^2-1) = x^{10}-1$

即 $x^8+x^6+x^4+x^2+1$

$$= \frac{x^{10}-1}{x^2-1} = \frac{(x^5-1)(x^5+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$= (x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

4. $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+5x^6+4x^7+3x^8+2x^9+x^{10}$

$= (1+2x+x^2)+(2x^2+4x^3+2x^4)+(3x^4+6x^5+3x^6)$
$+(2x^6+4x^7+2x^8)+(x^8+2x^9+x^{10})$

$= (x+1)^2+2x^2(x+1)^2+3x^4(x+1)^2+2x^6(x+1)^2+x^8(x+1)^2$

$= (x+1)^2(1+2x^2+3x^4+2x^6+x^8)$

$= (x+1)^2(1+2x^2+x^4+2x^4+2x^6+x^8)$

$= (x+1)^2(1+x^4+x^8+2x^2+2x^4+2x^6)$

$= (x+1)^2(x^4+x^2+1)^2$

$= (x+1)^2(x^4+2x^2+1-x^2)^2 = (x+1)^2[(x^2+1)^2-x^2]^2$

$= (x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2$

5. 設 $x+y=u, xy=v$，

原式 $= v(v+1)+(v+3)-2(u+\frac{1}{2})-(u-1)^2$

$= v^2+v+v+3-2u-1-u^2+2u-1$

$= v^2+2v+1-u^2$

$= (v+1)^2-u^2$

$= (v+u+1)(v-u+1)$

$= (xy+x+y+1)(xy-x-y+1)$

$= (x+1)(x-1)(y+1)(y-1)$

6. (a) $[(x+2)(x-4)][(x+3)(x-5)] = 44$

$(x^2-2x-8)(x^2-2x-15) = 44$

設 $y=x^2-2x$，

$(y-8)(y-15) = 44$

$y^2-23y+76 = 0$

$(y-4)(y-19) = 0$

$(x^2-2x-4)(x^2-2x-19) = 0$

$x^2-2x-4=0$ 或 $x^2-2x-19=0$

$x=\frac{2\pm\sqrt{20}}{2}=1\pm\sqrt{5}$ 或 $x=\frac{2\pm\sqrt{80}}{2}=1\pm2\sqrt{5}$。

所以 $x=1\pm\sqrt{5},1\pm2\sqrt{5}$。

(b) $(x^2+19x)^2-408(x^2+19x)-124848 = 0$

$(x^2+19x)^2-2^3\times3\times17\times(x^2+19x)-2^4\times3^3\times17^2 = 0$

$(x^2+19x+2^2\times3\times17)(x^2+19x-2^2\times3^2\times17) = 0$

$(x^2+19x+2^2\times3\times17)(x-2^2\times3^2)(x-17) = 0$

$(x^2+19x+204)(x-36)(x-17) = 0$

所以得 $x=17$ 或 $x=36$。

7. 設最大數為 x ，

$x(x-1)(x-2)(x-3) = 3024$

$(x^2-3x)(x^2-3x+2) = 3024$

設 $u = x^2 - 3x$

$u(u+2) - 3024 = 0$

$u^2 + 2u - 3024 = 0$

$(u+56)(u-54) = 0$

u = 54 或 u = -56（捨去）

$x^2 - 3x = 54$

$x^2 - 3x - 54 = 0$

$(x-9)(x+6) = 0$

x = 9 或 x = -6（捨去）

所以最大數為 9。

8. (a) $x^4 + x^2 - 6 = 0$

$(x^2+3)(x^2-2) = 0$

$x^2 = -3$（捨去） 或 $x^2 = 2$

所以 $x = \pm\sqrt{2}$ 。

(b) $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

$x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^2 = 0$

$(x^2-1)^2 - (2x)^2 = 0$

$(x^2-2x-1)(x^2+2x-1) = 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 或 $x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$ 或 $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$ 或 $x = -1 \pm \sqrt{2}$

綜合得 $x = \pm 1 \pm \sqrt{2}$ 。

9. 設 $y=x^2+3x$，

$$
\begin{aligned}
y-\frac{3}{y-7}-9 &= 0\\
y(y-7)-9(y-7)-3 &= 0\\
y^2-7y-9y+63-3 &= 0\\
y^2-16y+60 &= 0\\
(y-6)(y-10) &= 0
\end{aligned}
$$

即 $y-6=0$ 或 $y-10=0$

$x^2+3x-6=0$ 或 $x^2+3x-10=0$

由於兩式均各有兩個實根，故實根乘積 $=(-6)(-10)=60$。

10. (a) 顯然 $x=-1$ 為其中一個實根。

若 $x\neq -1$，則有 $(x+1)(2x^4-9x^3+14x^2-9x+2)=0$

$$
\begin{aligned}
2x^2-9x+14-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2} &= 0\\
2(x^2+\frac{1}{x^2})-9(x+\frac{1}{x})+14 &= 0\\
2(x+\frac{1}{x})^2-9(x+\frac{1}{x})+10 &= 0\\
(x+\frac{1}{x}-2)[2(x+\frac{1}{x})-5] &= 0
\end{aligned}
$$

即得 $x^2-2x+1=0$ 或 $2x^2-5x+2=0$

$x=1$ 或 $x=2,\frac{1}{2}$。

故得 $x=-1,\frac{1}{2},1,2$。

(b)
$$
\begin{aligned}
6(x^2+\frac{1}{x^2})-25(x-\frac{1}{x})+12 &= 0\\
6(x-\frac{1}{x})^2-25(x-\frac{1}{x})+24 &= 0\\
[2(x-\frac{1}{x})-3][3(x-\frac{1}{x})-8] &= 0
\end{aligned}
$$

$x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ 或 $x-\frac{1}{x}=\frac{8}{3}$

$2x^2-3x-2=0$ 或 $3x^2-8x-3=0$

$(2x+1)(x-2)=0$ 或 $(3x+1)(x-3)=0$

$x=2,-\frac{1}{2}$ 或 $x=3,-\frac{1}{3}$

故得 $x=-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},2,3$。

11. $a^4+ma^2+n = (a^2+2a+5)(a^2+pa+q)$

比較系數，得 $p+2=0$， 即 $p=-2$，

$2q+5p=0$， 即 $q=5$。

所以 $a^4+ma^2+n = (a^2+2a+5)(a^2-2a+5)\backslash$

即 $n=25, m=5+5+(2)(-2)=6$，所以 $mn=6\times25=150$。

12. （a） 設 $x^2-2x-2y^2+4y-xy = (x-2y+a)(x+y+b)$

則有 $\begin{cases} a+b=-2 \\ a-2b=4 \\ ab=0 \end{cases}$，解得 $a=0, b=-2$。

所以 $x^2-2x-2y^2+4y-xy = (x-2y)(x+y-2)$。

（b） 設 $9x^2-6x+y^2+4y-3 = (3x-y+a)(3x+y+b)$

則有 $\begin{cases} 3a+3b=-6 \\ a-b=4 \\ ab=-3 \end{cases}$，解得 $a=1, b=-3$。

所以 $9x^2-6x-y^2+4y-3 = (3x-y+1)(3x+y-3)$。

13. 設 $x^2-xy-12y^2+3x+ky-10 = (x-4y+a)(x+3y+b)$

比較系數得：$\begin{cases} a+b=3 \\ 3a-4b=k \\ ab=-10 \end{cases}$，

由（1）、（3）式，得 $a+(\frac{-10}{a}) = 3$

$a^2-3a-10 = 0$

$(a-5)(a+2) = 0$

解得 $a=5, b=-2$ 或 $a=-2, b=5$

即 k $= 3(5)-4(-2)=23$ 或 $3(-2)-4(5)=-26$。

即 m 的最大值為 23。