「噢！數？」 拾例集　　周浩然輯

代數 － 指數與對數

摘要

1. 運用對數的性質來解對數方程：
   （a） $\log(ab)=\log a+\log b$
   （b） $\log(\frac{a}{b})=\log a-\log b$
   （c） $\log(a^n)=n\log a$
   （d） $\log_a 1=0$
   （e） $\log_a b=\frac{\log b}{\log a}=\frac{1}{\log_a b}$
2. 記憶 $\log 2=0.301$、$\log 3=0.477$、$\log 7=0.845$ 等進行相關計算。
3. 運用指數的性質來解指數方程：
   （a） $x^a\times x^b=x^{a+b}$
   （b） $\frac{x^a}{x^b}=x^{a-b}$
   （c） $(x^a)^b=x^{ab}$
   （d） $(xy)^n=x^n y^n$
   （e） $(\frac{x}{y})^n=\frac{x^n}{y^n}$
   （f） $x^0=1$（$x\neq 0$）

4. 解超越方程

（a）$[p(x)]^{q(x)}=1$，

即 $\begin{cases} p(x)\neq 0 \\ q(x)=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} p(x)=-1 \\ q(x)=2k \end{cases}$ 或 $p(x)=1$。

（b）$[p(x)]^{x}=[q(x)]^{x}$，

即 $\begin{cases} x=0 \\ p(x)\neq 0 \\ q(x)\neq 0 \end{cases}$ 或 $p(x)=q(x)$ 或 $\begin{cases} p(x)=-q(x) \\ x=2k \end{cases}$。

（c）$[p(x)]^{x}=p(x)$，

即 $\begin{cases} p(x)=0 \\ x\neq 0 \end{cases}$ 或 $p(x)=1$ 或 $\begin{cases} p(x)=-1 \\ x\neq 2k \end{cases}$

或 $x=1$

（註： $x=2k$ 指符合偶指數要求：

1. x 為偶數。
2. 若 x 為既約分數，則要求 x 的分子為偶數、分母為奇數。）

拾例

1. 若 $A=\dfrac{3^n 9^{n+1}}{27^{n-1}}$，求 A。(HKMO 1984/85 決賽團體)

答： $A = \dfrac{3^n \times 3^{2n+2}}{3^{3n-3}} = \dfrac{3^{3n+2}}{3^{3n-3}} = 3^5 = 243$

2. 已知 $60^a=3$ 及 $60^b=5$。若 $R=12^{\frac{1-a-b}{2(1-b)}}$，求 R 的值。
(AHSME 1983)(HKMO 2004/05 初賽個人)

答： $a=\dfrac{\log 3}{\log 60}$，$b=\dfrac{\log 5}{\log 60}$，

所以 $\log R = \dfrac{1-a-b}{2(1-b)}\times\log 12 = \dfrac{\log 60-\log 3-\log 5}{2\log 60-2\log 5}\times\log 12$

$= \dfrac{\log\frac{60}{15}}{2\log\frac{60}{5}}\times\log 12 = \dfrac{\log 4}{2\log 12}\times\log 12$

$= \dfrac{1}{2}\log 4 = \log 2$

所以 $R=2$。

3. 求方程 $2\times 8^x+32\times 8^{-x}=65$ 的所有根的總和。(FWMT-S 1996)

答： $2\times 8^{2x}-65\times 8^x+32 = 0$

$(2\times 8^x-1)(8^x-32) = 0$

即 $8^x = \dfrac{1}{2}$ 或 $8^x = 32$

$3x\log 2 = -\log 2$ 或 $3x\log 2 = 5\log 2$

$x = -\dfrac{1}{3}$ 或 $x = \dfrac{5}{3}$

故所求總和 $= -\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{3}$。

4. 若 x, y 為實數且滿足 $3^x - 3^y = 4$ 及 $9^x - 9^y = 20$，求 $x - y$。

答： $9^x - 9^y = (3^x + 3^y)(3^x - 3^y) = 20$

即 $3^x + 3^y = 5$

連同 $3^x - 3^y = 4$

解得 $3^x = 9, 3^y = 1$。

再由於 $3^{x-y} = \dfrac{3^x}{3^y} = 9$，所以 $x - y = 2$。

5. 求方程 $(x^2 - x - 1)^{x+2009} = 1$ 的所有根的和。(HKMHSAC 2008/09)

答： 情況 1： $x + 2009 = 0$ 及 $x^2 - x - 1 \neq 0$，得 $x = -2009$。

情況 2： $x^2 - x - 1 = 1$，$x^2 - x - 2 = 0$，解得 $x = 2, -1$。

情況 3： $x^2 - x - 1 = -1$ 及 $x + 2009$ 為偶數，

解得 $x = 0$（捨去）或 $x = 1$。

故所有根的和為 $-2009 + 2 - 1 + 1 = -2007$。

6. 求滿足方程 $(x+2)^x = (3x-5)^x$ 的實數解數目。

答： 情況 1： $x = 0$，

情況 2： $x + 2 = 3x - 5$，即 $x = \dfrac{7}{2}$。

情況 3： $x + 2 = -(3x - 5)$，即 $x = \dfrac{3}{4}$，不乎合偶指數要求，故捨去。

所以滿足上式的實數解有兩個。

7. 已知 $b = \dfrac{\log(8^{\frac{1}{3}}) + \log(27^{\frac{1}{3}})}{\log 4 + \log 9}$，求 b 的值。

(HKMO 2009/10 決賽個人)

答： $b = \dfrac{\log 2 + \log 3}{\log 4 + \log 9} = \dfrac{\log(2\times 3)}{\log(4\times 9)} = \dfrac{\log 6}{\log 36} = \dfrac{\log 6}{2\log 6}$

$= \dfrac{1}{2}$

8. 已知 $a^x = b^y = c^z = 100^w$ 及 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{w}$，當中 a,b,c（$a<b<c$）為正整數及 w,x,y,z 為實數。求 $a+b+c$ 的值。

答： 由 $a^x = 100^w$ 中可得 $x=\frac{w\log 100}{\log a}$，同理 $y=\frac{w\log 100}{\log b}, z=\frac{w\log 100}{\log c}$。

代入 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{w}$

可得 $\frac{\log a}{w\log 100}+\frac{\log b}{w\log 100}+\frac{\log c}{w\log 100} = \frac{1}{w}$

$$\frac{\log a+\log b+\log c}{w\log 100} = \frac{1}{w}$$

$$\log a+\log b+\log c = \log 100$$

即 $abc = 100$

由於 a,b,c（$a<b<c$）為正整數，及 $a,b,c\neq 1$，

所以得 $a=2, b=5, c=10$，即 $a+b+c=2+5+10=17$。

9. 設 $d=\log_4 2+\log_4 4+\log_4 8+\ldots+\log_4 2^8$，求 d 的值。
(HKMO 2006/07 決賽個人)

答： d = $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+4$ = $\frac{8\times(8+1)}{2\times 2}$ = 18

10. 問 $2^{35}, 3^{52}, 5^{23}$ 各有多少個數位及求各數的首位數字？

答： $\log 2^{35}+1$ = $35\log 2+1$ = $35(0.301)+1$ = 11.535。

故 2^{35} 有 11 個數位。

另 $\log 3<0.535<\log 4$，故 2^{35} 的首位為 4。

$\log 3^{52}+1$ = $52\log 3+1$ = $52(0.477)+1$ = 25.804。

故 3^{52} 有 25 個數位。

另 $\log 6<0.804<\log 7$，故 3^{52} 的首位為 6。

$\log 5^{23}+1$ = $23\log 5+1$ = $23(1-0.301)+1$
= $23(0.699)+1$ = 17.077

故 5^{23} 有 17 個數位。

另 $\log 1<0.077<\log 2$，故 5^{23} 的首位為 1。

(註： $2^{35}=34359738368$、$3^{52}=6461081889226673298932241$ 及
$5^{23}=11920928955078125$。)

淺問

1. 我赴聖地愛弗西，途遇婦女數有七，每人七袋手中提，一袋七貓數整齊，一貓七崽緊相依。婦與布袋貓與崽，幾何同時赴聖地？
(註：英國古謠。「愛弗西」(Ives) 英國地名，「幾何」意指「多少」。)

2. 求下列各數的值：
(a) $\dfrac{\log_3 25}{\log_3 125}$ (b) $\log_4 49\times\log_7 16$ (c) $\log_6 8+\log_6 27$

3. 解下列對數方程：
(a) $\log(x^2-4)-\log(x-2)=1$
(b) $\log_3(2x-1)^2-\log_3|2x-1|=4$
(c) $\log_7[\log_5(\log_3 x)]=0$ (HKMO 1990/91 初賽個人)

4. 若 $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_3 x}=\dfrac{1}{2}$，求 x 的值。

5. 若 $\log_2 3=a$ 及 $\log_3 11=b$，試以 a,b 表示 $\log_{11}2$ 及 $\log_{44}66$。

6. 若 $b<0$ 及 $2^{2b+4}-20\times 2^b+4=0$，求 b。(HKMO 1989/90 初賽個人)

7 解下列指數方程：
(a) $2^{2x}-2^{x+3}+12=0$ (b) $8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0$

8. 若 x 為實數且 $\log x=x^{-1}$，求 $(x^2)^{2x}$ 的值。(培正 2002 中四)

9. 設 $x>0, y>0$，$(\log_3 x)(\log_x 2x)(\log_{2x} y)=\log_x x^2$，求 y 的值。
(AHSME 1959) (HKMO 1993/94 初賽團體)(FWMT-S 1997)

10. 求下列各數的位數及首位數字：
(a) 2^{90} (b) 3^{80} (c) 4^{70} (d) 5^{60}
(e) 6^{50} (f) 7^{40} (g) 8^{30} (h) 9^{20}

11. 若方程 $(x^2-x-1)^{x+4}=1$ 有 Q 個整數解，求 Q 的值。
(HKMO 2002/03 決賽個人)

詳答

1. 婦女有 7 名，布袋有 $7^2 = 49$ 個，貓有 $7^3 = 343$ 隻，
崽有 $7^4 = 2401$ 隻。合共有 $7 + 49 + 343 + 2401 = 2800$。

2. (a)
$$\frac{\log_3 25}{\log_3 125} = \frac{\log 25}{\log 3} \times \frac{\log 3}{\log 125} = \frac{\log 25}{\log 125}$$
$$= \frac{2\log 5}{3\log 5} = \frac{2}{3}$$

(b)
$$\log_4 49 \times \log_7 16 = \frac{\log 49}{\log 4} \times \frac{\log 16}{\log 7}$$
$$= \frac{2\log 7}{\log 4} \times \frac{2\log 4}{\log 7} = 4$$

(c)
$$\log_6 8 + \log_6 27 = \log_6 (8 \times 27) = \log_6 216$$
$$= \log_6 6^2 = 2$$

3. (a)
$$\log(x^2 - 4) - \log(x - 2) = 1$$
$$\log \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 1$$
$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 10$$
$$x + 2 = 10 \quad (\text{因 } x \neq 2)$$
$$x = 8$$

(b)
$$\log_3 (2x-1)^2 - \log_3 |2x-1| = 4$$
$$2\log_3 |2x-1| - \log_3 |2x-1| = 4$$
$$\log_3 |2x-1| = 4$$
$$|2x-1| = 81$$
$x = 41$ 或 -40

(c)
$$\log_7 [\log_5 (\log_3 x)] = 0$$
$$\log_5 (\log_3 x) = 7^0 = 1$$
$$\log_3 x = 5^1 = 5$$
$$x = 3^5 = 243$$

4.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x} &= \frac{1}{2} \\
\log_x 2+\log_x 3 &= \frac{1}{2} \\
\log_x 6 &= \frac{1}{2} \\
\frac{\log 6}{\log x} &= \frac{1}{2} \\
\log x &= 2\log 6 \\
x &= 36
\end{aligned}
$$

5.

$$
\begin{aligned}
\log_{11} 2 &= \frac{\log_3 2}{\log_3 11} = \frac{1}{a}\div b = \frac{1}{ab} \\
\log_{44} 66 &= \frac{\log_3 44}{\log_3 66} = \frac{\log_3(2^2\times 11)}{\log_3(2\times 3\times 11)} \\
&= \frac{2\log_3 2+\log_3 11}{\log_3 2+\log_3 3+\log_3 11} \\
&= \frac{\frac{2}{a}+b}{\frac{1}{a}+1+b} = \frac{2+ab}{1+a+ab}
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
2^{2b+4}-20\times 2^b+4 &= 0 \\
16\times 2^{2b}-20\times 2^b+4 &= 0 \\
4\times 2^{2b}-5\times 2^b+1 &= 0 \\
(4\times 2^b-1)(2^b-1) &= 0
\end{aligned}
$$

$2^b=\frac{1}{4}$ 或 $2^b=1$

$b=-2$ 或 $b=0$（捨去）

7. (a) $2^{2x}-2^{x+3}+12 = 0$

$(2^x)^2-8\times 2^x+12 = 0$

$2^x=6$ 或 $2^x=2$

故得 $x=\dfrac{\log 6}{\log 2}$ 或 1。

(b) 令 $t=2^x+2^{-x}$，

即 $t^2=(2^x+2^{-x})^2=2^{2x}+2\times 2^x\times 2^{-x}+2^{-2x}=4^x+4^{-x}+2$

故原方程可化為

$8t^2-54t+85 = 0$

$(2t-5)(4t-17) = 0$

$t=\dfrac{5}{2}$ 或 $t=\dfrac{17}{4}$

若 $2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}$，即 $2\times 2^{2x}-5\times 2^x+2=0$，

即 $2^x=2,\dfrac{1}{2}$，$x=\pm 1$。

若 $2^x+2^{-x}=\dfrac{17}{4}$，即 $4\times 2^{2x}-17\times 2^x+4=0$，

即 $2^x=4,\dfrac{1}{4}$，$x=\pm 2$。

故解為 $x=\pm 1,\pm 2$。

8. $\log x = \dfrac{1}{x}$

$x\log x = 1$

$\log x^x = 1$

$x^x = 10$

所以 $(x^2)^{2x} = x^{4x} = 10^4 = 10000$。

9. $(\log_3 x)(\log_x 2x)(\log_{2x} y) = \log_x x^2$

$\dfrac{\log x}{\log 3}\times\dfrac{\log 2x}{\log x}\times\dfrac{\log y}{\log 2x} = \dfrac{\log x^2}{\log x}$

$\dfrac{\log y}{\log 3} = \dfrac{2\log x}{\log x}=2$

$\log y = 2\log 3=\log 3^2$

$y = 9$

10. (a) $\log 2^{90} = 90\log 2 = 90\times 0.301 = 27.09$

故位數為 27 + 1 = 28。

另 $\log 1 < 0.09 < \log 2$，故該數首位為 1。

（註： $2^{90} = 1237940039285380274899124224$ 。）

(b) $\log 3^{80} = 80\log 3 = 80\times 0.477 = 38.16$

故位數為 38 + 1 = 39。

另 $\log 1 < 0.16 < \log 2$，故該數首位為 1。

（註： $3^{80} = 147808829414345923316083210206383297601$ 。）

(c) $\log 4^{70} = 140\log 2 = 140\times 0.301 = 42.14$

故位數為 42 + 1 = 43。

另 $\log 1 < 0.14 < \log 2$，故該數首位為 1。

（註： $4^{70} = 1393796574908163946345982392040522594123776$ 。）

(d) $\log 5^{60} = 60(1-\log 2) = 60\times 0.699 = 41.94$

故位數為 41 + 1 = 42。

另 $\log 8 < 0.94 < \log 9$，故該數首位為 8。

（註： $5^{60} = 867361737988403547205962240695953369140625$ 。）

(e) $\log 6^{50} = 50(\log 2+\log 3) = 50\times 0.778 = 38.90$

故位數為 38 + 1 = 39。

另 $\log 8 < 0.90 < \log 9$，故該數首位為 8。

（註： $6^{50} = 808281277464764060643139600456536293376$ 。）

(f) $\log 7^{40} = 40\log 7 = 40\times 0.845 = 33.80$

故位數為 33 + 1 = 34。

另 $\log 6 < 0.80 < \log 7$，故該數首位為 6。

（註： $7^{40} = 6366805760909027985741435139224001$ 。）

(g) $\log 8^{30} = 90\log 2 = 90\times 0.301 = 27.09$

故位數為 27 + 1 = 28。

另 $\log 1 < 0.09 < \log 2$，故該數首位為 1。

（註： $8^{30} = 1237940039285380274899124224$ 。）

(h) $\log 9^{20} = 40\log 3 = 40\times 0.477 = 19.08$

故位數為 19 + 1 = 20。

另 $\log 1 < 0.08 < \log 2$，故該數首位為 1。

（註： $9^{20} = 12157665459056928801$。）

11.　該方程有解的情況有三：

一是　$x+4=0$，但 $x^2-x-1\neq 0$，解得 $x=4$。

二是　$x^2-x-1=1$，解得 $x=-1,2$。

三是　$x^2-x-1=-1$，且 $x+4$ 為偶數。解得 $x=0,1$，

但 1 不可使 $x+4$ 為偶數。故只有一解 $x=0$。

總結，$Q=4$。

追求真理時，發現真理；
已知真理時，論證真理；
探討真理時，鑒別真理。

法國神學家、數學家
帕斯卡
(Blaise Pascal 1623-1662)