「噢！數？」拾例集　周浩然輯

代數 – 無理不等式

摘要

1. 解超越不等式：

   若 $[p(x)]^{q(x)} > 1(<1)$，即 $\begin{cases} p(x) > 1 \\ q(x) > 0(<0) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 < p(x) < 1 \\ q(x) < 0(>0) \end{cases}$。

   若左右兩方相等，需結合超越方程一同考慮。

2. 解根式不等式：

   (a) 若 $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$，即 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$

   (b) 若 $\sqrt{f(x)} \ge \sqrt{g(x)}$，即 $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge g(x) \end{cases}$

   (c) 若 $\sqrt{f(x)} > g(x)$，即 $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

   (d) 若 $\sqrt{f(x)} \ge g(x)$，即 $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge [g(x)]^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

   (e) 若 $\sqrt{f(x)} < g(x)$，即 $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

   (f) 若 $\sqrt{f(x)} \le g(x)$，即 $\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ f(x) \le [g(x)]^2 \end{cases}$

3. 解與指數相關的不等式。

4. 解與對數相關的不等式：

若 $a>1$ 則

(a) 若 $\log_a[f(x)]\geq k$， 即 $f(x)\geq a^k$，

(b) 若 $\log_a[f(x)]\leq k$， 即 $0<f(x)\leq a^k$，

(c) 若 $\log_a[f(x)]>k$， 即 $f(x)>a^k$，

(d) 若 $\log_a[f(x)]<k$， 即 $0<f(x)<a^k$。

(e) 若 $\log_a[f(x)]\geq \log_a[g(x)]$，即 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)\geq g(x) \end{cases}$，

(f) 若 $\log_a[f(x)]>\log_a[g(x)]$，即 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$。

若 $0<a<1$ 則

(a) 若 $\log_a[f(x)]\geq k$， 即 $0<f(x)\leq a^k$，

(b) 若 $\log_a[f(x)]\leq k$， 即 $f(x)\geq a^k$，

(c) 若 $\log_a[f(x)]>k$， 即 $0<f(x)<a^k$，

(d) 若 $\log_a[f(x)]<k$， 即 $f(x)>a^k$。

(e) 若 $\log_a[f(x)]\geq \log_a[g(x)]$，即 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)\leq g(x) \end{cases}$，

(f) 若 $\log_a[f(x)]>\log_a[g(x)]$，即 $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$。

拾例

1. 解不等式 $\sqrt{4x-3} > \sqrt{2x+3}$。

答： 原題等價 $\begin{cases} 4x-3>0 \\ 2x+3\geq 0 \\ 4x-3>2x+3 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x>\dfrac{3}{4} \\ x\geq -\dfrac{3}{2} \\ x>3 \end{cases}$。綜合得 $x>3$。

2. 解不等式 $\sqrt{x^2-7x+10} < x+2$。

答： 原式等價 $\begin{cases} x^2-7x+10\geq 0 \\ x+2>0 \\ x^2-7x+10<(x+2)^2 \end{cases}$，即 $\begin{cases} (x-2)(x-5)\geq 0 \\ x+2>0 \\ 11x-6>0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x\leq 2, x\geq 5 \\ x>-2 \\ x>\dfrac{6}{11} \end{cases}$$

故解為 $\dfrac{6}{11}<x\leq 2$ 或 $x\geq 5$。

3. 解不等式 $\sqrt{x^2-5x-6} \geq x-3$。

答： 原式等價 $\begin{cases} x^2-5x-6\geq 0 \\ x-3\geq 0 \\ x^2-5x-6\geq (x-3)^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2-5x-6\geq 0 \\ x-3<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-6)(x+1)\geq 0 \\ x-3\geq 0 \\ x-15\geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} (x-6)(x+1)\geq 0 \\ x-3<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\leq -1, x\geq 6 \\ x\geq 3 \\ x\geq 15 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x\leq -1, x\geq 6 \\ x<3 \end{cases}$

故解為 $x\leq -1$ 或 $x\geq 15$。

4. 求滿足 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0.1$ 的最小正整數 n。

答： 若 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0.1$，即 $\sqrt{n}+\sqrt{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}>10$。

取近似值 $\sqrt{n}=5$，即 $n=25$。

但當 $n=25$，$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}=\sqrt{25}+\sqrt{24}<2\sqrt{25}=10$。

取 $n=26$，$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}=\sqrt{26}+\sqrt{25}>2\sqrt{25}=10$。

所以 n 的最小值為 26。

5. 能滿足不等式 $n^{200}<5^{300}$ 的最大整數 n 是多少？
(HKMO 1995/96 個人初賽)

答： $n^{200} < 5^{300}$

$n < 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{125}$

由於 $121<125<144$，即 $11<\sqrt{125}<12$，

故 n 的最大整數值為 11。

6. 求滿足不等式 $(x-4)^{400}>5^{500}$ 的 x 的最小正整數值。

答： $(x-4)^{4} > 5^{5} = 3125$

由於 $7^{4}<3125<8^{4}$，

即 $x-4$ 的最小正整數值為 8，即 x 的最小正整數值為 12。

7. 解不等式 $\log(3x-1)\le 0$。

答： $0 < 3x-1 \le 1$

$1 < 3x \le 2$

$\dfrac{1}{3} < x \le \dfrac{2}{3}$。

8. 解不等式 $\log_5(4x-3)>2$。

答： $4x-3 > 25$

$4x > 28$

$x > 7$。

9.　求滿足不等式 $\log(4+3x-x^2)\geq\log(4x-2)$ 的 x 的最大值。

答：　即解聯立不等式：

$$\begin{cases}4+3x-x^2>0\\4x-2>0\\4+3x-x^2\geq 4x-2\end{cases}\qquad\begin{cases}x^2-3x-4<0\\4x-2>0\\x^2+x-6\leq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+1)(x-4)<0\\2x-1>0\\(x+3)(x-2)\leq 0\end{cases}\qquad\begin{cases}-1<x<4\\x>\dfrac{1}{2}\\-3\leq x\leq 2\end{cases}$$

故得解 $\dfrac{1}{2}<x\leq 2$，故 x 的最大值為 2。

10.　解不等式 $(x+3)^{x-3}<1$。

答：

$$\begin{cases}x+3>1\\x-3>0\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}0<x+3<1\\x-3<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>-2\\x>3\end{cases}\text{ 或 }\begin{cases}-3<x<-2\\x<3\end{cases}$$

故得解 $-3<x<-2$ 或 $x>3$。

數學的最基本结果往往是一些不等式
而不是等式。

美國數學家
貝肯巴赫
(Edwin Ford Beckenbach 1906-1982)

淺問

1. 解下列不等式
(a) $(x+2)^{3-4x}>1$。 (b) $0<(6x+5)^{7-8x}<1$

2. 解不等式 $(\sqrt{3x+1}+2)(x^2-x-2)\le 0$。

3. 解下列不等式：
(a) $\sqrt{2x-6}\ge\sqrt{x-5}$ (b) $x+\sqrt{3}<\sqrt{x^2+2}$
(c) $\sqrt{3(3-x)}>3-2x$ (d) $4-3x\le\sqrt{-x^2+3x-2}$

4. 求滿足 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0.01$ 的最小正整數 n。(AHSME 1978)

5. 若不等式 $a\sqrt{x}>x+b$ 的解 $4<x<9$，求 a,b 的值。

6. 已知一矩形的對角線長 8 cm，如果矩形的周界不多於 20 cm，求矩形較短的一邊的最大值。

7. 解不等式 $\dfrac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$。

8. 求能滿足不等式 $n^{4000}<7^{3000}$ 的最大整數 n 是多少？

9. 設 R 為最大的整數值使得 $R^{300}<5^{200}$，求 R 的值。
(HKMO 2007/08 決賽個人)

10. 若 x 為一整數且滿足 $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$，求 x 的最大值。
(HKMO 2010/11 決賽團體)

11. 求滿足不等式 $\log_{0.5}(4+3x-x^2)\ge\log_{0.5}(4x-2)$ 的 x 的最小值。

12. 若 $\log_{2011}1+\log_{2011}2+\log_{2011}3+\ldots+\log_{2011}n>1$，求整數 n 的最小可能值。
(培正 2011 初賽高中)

13. 解不等式 $\log_{x-1}(x+1)>2$。

詳答

1. (a) $(x+2)^{3-4x}>1$

即 $\begin{cases} x+2>1 \\ 3-4x>1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0<x+2<1 \\ 3-4x<0 \end{cases}$

$\begin{cases} x>-1 \\ x<\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -2<x<-1 \\ x>\dfrac{3}{4} \end{cases}$

$-1<x<\dfrac{1}{2}$ 或 無解

故解為 $-1<x<\dfrac{1}{2}$。

(b) $0<(6x+5)^{7-8x}<1$

即 $\begin{cases} 0<6x+5<1 \\ 7-8x>1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 6x+5>1 \\ 0<7-8x<1 \end{cases}$

$\begin{cases} -\dfrac{5}{6}<x<-\dfrac{2}{3} \\ x<\dfrac{3}{4} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x>-\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{3}{4}<x<\dfrac{7}{8} \end{cases}$

故解為 $-\dfrac{5}{6}<x<-\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{7}{8}$。

2. 即得 $\begin{cases} x^2-x-2\le 0 \\ 3x+1\ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)(x+1)\le 0 \\ 3x+1\ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -1\le x\le 2 \\ x\ge\dfrac{1}{3} \end{cases}$

故得 $\dfrac{1}{3}\le x\le 2$。

3. (a) $\sqrt{2x-6} \ge \sqrt{x-5}$

即 $\begin{cases} 2x-6 \ge 0 \\ x-5 \ge 0 \\ 2x-6 \ge x-5 \end{cases}$， $\begin{cases} x \ge 3 \\ x \ge 5 \\ x \ge 1 \end{cases}$。得 $x \ge 5$。

(b) $x+\sqrt{3} < \sqrt{x^2+2}$

由於對所有 x, $x^2+2>0$，

故 $x^2+2\sqrt{3}x+3 < x^2+2$

$x < \dfrac{-1}{2\sqrt{3}}$

$x < -\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

(c) $\sqrt{3(3-x)} > 3-2x$

即 $\begin{cases} 3(3-x) \ge 0 \\ 3-2x \ge 0 \\ 3(3-x) > (3-2x)^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3(3-x) \ge 0 \\ 3-2x < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \le 3 \\ x \le \dfrac{3}{2} \\ 9-3x > 9-12x+4x^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \le 3 \\ x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x \le 3 \\ x \le \dfrac{3}{2} \\ 4x^2-9x<0 \end{cases}$ 或 $\dfrac{3}{2} < x \le 3$

$\begin{cases} x \le 3 \\ x \le \dfrac{3}{2} \\ x(4x-9)<0 \end{cases}$ 或 $\dfrac{3}{2} < x \le 3$

$\begin{cases} x \le 3 \\ x \le \dfrac{3}{2} \\ 0<x<\dfrac{9}{4} \end{cases}$ 或 $\dfrac{3}{2} < x \le 3$

$0 < x \le \dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{3}{2} < x \le 3$

所以解為 $0 < x \le 3$。

3.　(d)　原式等價 $\begin{cases} -x^2+3x-2\ge 0 \\ 4-3x\ge 0 \\ (4-3x)^2\le -x^2+3x-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -x^2+3x-2\ge 0 \\ 4-3x<0 \end{cases}$

即解 $\begin{cases} -x^2+3x-2\ge 0 \\ 4-3x\ge 0 \\ 10x^2-27x+18\le 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -x^2+3x-2\ge 0 \\ 4-3x<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-1)(x-2)\le 0 \\ 4-3x\ge 0 \\ (2x-3)(5x-6)\le 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} (x-1)(x-2)\le 0 \\ 4-3x<0 \end{cases}$

得 $\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ x\le \frac{4}{3} \\ \frac{6}{5}\le x\le \frac{3}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ x>\frac{4}{3} \end{cases}$

即 $\frac{6}{5}\le x\le \frac{4}{3}$ 或 $\frac{4}{3}<x\le 2$

故得 $\frac{6}{5}\le x\le 2$。

4.　若 $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0.01$，即 $\sqrt{n}+\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}>100$。

取近似值 $\sqrt{n}=50$，即 $n=2500$。

但當 $n=2500$，$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}=\sqrt{2500}+\sqrt{2499}<2\sqrt{2500}=100$。

取 $n=2501$，$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}=\sqrt{2501}+\sqrt{2500}>2\sqrt{2500}=100$。

所以 n 的最小值為 2501。

5.　設 $t=\sqrt{x}$，原式變成 $at>t^2+b$，即 $t^2-at+b<0$。

由於 t 的解集為 (2, 3)，

所以得 $t^2-at+b=(t-2)(t-3)<0$，

比較系數得 $a=5,b=6$。

6. 設矩形較短的一邊長 x cm，則另一邊長 $\sqrt{64-x^2}$ cm。

$$\begin{cases} 0<x<8 \\ x<\sqrt{64-x^2} \\ 2x+2\sqrt{64-x^2}\le 20 \end{cases}，即 \begin{cases} 0<x<8 \\ x^2<64-x^2 \\ 64-x^2\le 100-20x+x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0<x<8 \\ x^2<32 \\ x^2-10x+18\ge 0 \end{cases}，即 \begin{cases} 0<x<4\sqrt{2} \\ x\le 5-\sqrt{7} 或 x\ge 5+\sqrt{7} \end{cases}$$

故得解 $0<x\le 5+\sqrt{7}$，故較短的一邊的最大值為 $5+\sqrt{7}$ cm。

7. $\dfrac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$，

由根值和分數性質，得知 $1+2x\ge 0$ 及 $1+2x\ne 1$，即 $x\ge -\dfrac{1}{2}$ 及 $x\ne 0$.

又當 $x\ne 0$ 時，

$$\frac{-2x}{1-\sqrt{1+2x}}=1+\sqrt{1+2x}。$$

原式可化為

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{1+2x})^2 &< 2x+9 \\ 1+1+2x+2\sqrt{1+2x} &< 2x+9 \\ \sqrt{1+2x} &< \frac{7}{2} \\ 1+2x &< \frac{49}{4} \\ x &< \frac{45}{8} \end{aligned}$$

綜合得解 $-\dfrac{1}{2}\le x<0$ 或 $0<x<\dfrac{45}{8}$。

8. 即 $n^4<7^3=343$，但 $256<343<625$，即 $4<n<5$，故取 $n=4$。

9. R < $5^{\frac{2}{3}}$ = $\sqrt[3]{25}$

由於 $8<125<27$，即 $2<\sqrt[3]{25}<3$，故 R 的最大整數值為 2。

10. $$\frac{\log(2x+1)}{\log\frac{1}{4}} < \frac{\log(x-1)}{\log\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\log(2x+1)}{-2\log 2} < \frac{\log(x-1)}{-\log 2}$$

$$\log(2x+1) > 2\log(x-1)$$

$$2x+1 > (x-1)^2$$

$$x^2-4x < 0$$

所以 $0<x<4$， x 的最大值為 3。

11. 即解聯立不等式：

$$\begin{cases} 4+3x-x^2>0 \\ 4x-2>0 \\ 4+3x-x^2 \le 4x-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-3x-4<0 \\ 4x-2>0 \\ x^2+x-6\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-4)<0 \\ 2x-1>0 \\ (x+3)(x-2)\ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1<x<4 \\ x>\frac{1}{2} \\ x\le -3, x\ge 2 \end{cases}$$

故得解 $2\le x<4$，故 x 的最小值為 2。

12. 原式 = $\log_{2011}(1\times 2\times 3\times\ldots\times n) > 1$

$$\log_{2011} n! > 1$$

$$n! > 2011$$

由於 6! = 720，7! = 5040，所以 n 的最小可能值為 7。

13. $$\frac{\log(x+1)}{\log(x-1)} > 2$$

若 $\log(x-1)<0$，即 $x-1<1$，$x<2$

$$\log(x+1) < 2\log(x-1)$$

$$x+1 < (x-1)^2$$

$$x^2-3x > 0$$

即 $x<0$（捨去） 或 $x>3$。綜合無解。

若 $\log(x-1)>0$，即 $x-1>1$，$x>2$

$$\log(x+1) > 2\log(x-1)$$

$$x+1 > (x-1)^2$$

$$x^2-3x < 0$$

即 $0<x<3$。綜合得 $2<x<3$。

故解為 $2<x<3$。