「噢！數？」拾例集　周浩然輯

代數 – 函數論

摘要

1. 認識基本函數的定義域、值域。
2. 認識基本函數的單調性及最值。
3. 認識基本函數的奇偶性：
   (a) 奇函數：　$f(-x) = -f(x)$
   (b) 偶函數：　$f(-x) = f(x)$
   (c) 留意，不論奇函數或偶函數，也有 $f(0) = 0$ 這一點。
4. 建構反函數。
5. 認識反函數的圖像為函數的圖像以直線 $y = x$ 為軸的反射影像。

拾例

1. 函數 F 定義為 $F(x)=\begin{cases}2x+1 & x\le 3\\ 3x^2 & x>3\end{cases}$，求 $F(F(3))$。

(HKMO 1988/89 初賽個人)

答： $F(F(3)) = F(2(3)+1) = F(7) = 3\times 7^2 = 147$。

2. 定義整函數 $f(x)$ 如下：當 x 為奇數時，$f(x)=3x+1$；當 x 為偶數時，$f(x)=\dfrac{x}{2}$。求 $f(f(f(123)))$。

答： $f(f(f(447))) = f(f(3\times 123+1)) = f(f(370))$

$= f(\dfrac{370}{2}) = f(185)$

$= 3\times 185+1 = 556$。

(註： 這是著名的「3n+1 猜想」，任何正整數 n ，經有限次疊代，結果為 1。)

3. 若 $f(f(f(x+1))=8x+15$，求 $f(x)$。

答： 設 $f(x)=ax+b$，

$f(f(f(x+1)))=a\{a[a(x+1)+b]+b\}+b=a^3x+(a^3+a^2b+ab+b)$。

即 $\begin{cases}a^3=8\\ a^3+a^2b+ab+b=15\end{cases}$，解得 $a=2,b=1$。

所以 $f(x)=2x+1$。

4. 對於任何正整數 x,y，定義 $\#(x,y)=x-\dfrac{1}{y}$。求 $\#(2,\#(2,2))$ 的值。

(AMC 10 2010)

答： 原式 $= \#(2,2-\dfrac{1}{2}) = \#(2,\dfrac{3}{2}) = 2-\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$。

5. 若 $f(x-1)+2f(1-x)=3x$，求 $f(100)$ 的值。

答： 以 $1-x$ 代入原方程的 x，有 $f(-x)+2f(x)=3(1-x)$。

以 $1+x$ 代入原方程的 x，有 $f(x)+2f(-x)=3(1+x)$。

解聯方程 $\begin{cases}f(-x)+2f(x)=3(1-x)\\ f(x)+2f(-x)=3(1+x)\end{cases}$，得 $f(x)=1-3x$。

所以 $f(100)=1-3(100)=-299$。

6. 設 f 為一函數，對於所有正實數 x, y，有 $f(xy)=\frac{f(x)}{y}$。若 $f(30)=20$，求 $f(40)$ 的值。（SAMO-S 2002）

答：
$$f(30) = f(5\times 6) = \frac{f(5)}{6}$$
$$f(5) = 6f(30) = 120$$
$$f(40) = f(5\times 8) = \frac{f(5)}{8} = 15$$。

7. 已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-64$ 及 $f(6)=4$，求 $f(-6)$ 的值。

答：
$$\begin{aligned} f(-6) &= (-6)^5+a(-6)^3+b(-6)-64 \\ &= -(6)^5-a(6)^3-b(6)-64 \\ &= -[(6)^5+a(6)^3+b(6)-64]-128 \\ &= -4-128 = -132 \end{aligned}$$。

8. 已知 $f(x)=x^6+ax^4+bx^2-64x$ 及 $f(6)=4$，求 $f(-6)$ 的值。

答：
$$\begin{aligned} f(-6) &= (-6)^6+a(-6)^4+b(-6)^2-64(-6) \\ &= (6)^5+a(6)^3+b(6)+64(6) \\ &= (6)^5+a(6)^3+b(6)-64(6)+128(6) \\ &= 4+128(6) = 772 \end{aligned}$$。

9. 設 $P(7,3)$ 為二次函數 $f(x)=ax^2-4ax+b$ $(x\ge 1)$ 的圖像與其反函數 $y=f^{-1}(x)$ 的圖像的一個交點，求 ab 的值。

答：代 $P(7,3)$ 及（3, 7）入 $f(x)=ax^2-2ax+b$，得
$a(7)^2-4a(7)+b=3$，即 $21a+b=3$；
$a(3)^2-4a(3)+b=7$，即 $-3a+b=7$。
解得 $a=-\frac{1}{6}, b=\frac{13}{2}$，所以 $ab=-\frac{1}{6}\times\frac{13}{2}=-\frac{13}{12}$。

10. 求 $f(x)=4x-23$ 的反函數。

答：令
$$y = 4x-23$$
$$y+23 = 4x$$
$$x = \frac{y+23}{4}$$
故反函數 $f^{-1}(x)=\frac{x+23}{4}$。

淺問

1. 若 $f(a)=a-2$，且 $F(a,b)=a+b^2$，求$F(3,f(4))$ 的值。
(中國北京市高中數學競賽 1985)(HKMO 1989/90 初賽個人)

2. 已知 $y=ax^5+bx^3+cx-5$。當 $x=-3$ 時，$y=7$。求當 $x=3$ 時，y 的值。(五市初數聯 1984)(中國安徽省初中數學競賽 1997)

3. 設函數 $f(x)$ 是定義域為全體實數的奇函數，$f(1)=\frac{1}{2}$，
$f(x+2)=f(x)+f(2)$。求 $f(5)$ 的值。

4. $y=ab-a+b-1$ 且 $a=49, b=21$，求 y。(HKMO 1987/88 決賽團體)

5. 求下列函數的定義域和值域：
(a) $f(x)=\sqrt{4x-23}$ (b) $f(x)=\sqrt{4x^2+23}$
(c) $f(x)=|4x-23|$ (d) $f(x)=|4x^2+23|$
(e) $f(x)=\log(4x+23)$ (f) $f(x)=\log|4x^2-23|$
(g) $f(x)=\frac{4x+23}{4x-23}$ (h) $f(x)=\frac{4x^2-23}{4x^2+23}$
(i) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x-23}}$ (j) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4x^2+2x+3}}$

6. 求下列函數的反函數：
(a) $f(x)=x+2$ (b) $f(x)=\frac{3x-4}{5x+6}$
(c) $f(x)=\sqrt{7x-8}$ (d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9x+10}}$

7. 若 $f(x)=ax+b$ 及 $f^{-1}(x)=bx+a$，求 $a+b$ 的值。(AMC 12 2005)

8. 求函數 $y=\frac{3x-1}{x+1}$ 的值域。

9. 若 $g(x)=x^2+a$，且 $g(g(2))=123$，求 $g(a)$ 的最大值。

10. 若 $f(x-1)+10f(1-x)=11x$，求 $f(99)$ 的值。

詳答

1. $F(3, f(4)) = 3+[f(4)]^2 = 3+(4-2)^2 = 7$

2. $$\begin{aligned} y &= a(3)^5+b(3)^3+c(3)-5 \\ &= -[a(-3)^5+b(-3)^3+c(-3)]-5 \\ &= -[7+5]-5 = -17 \end{aligned}$$

3. $f(-1)=-f(1)=-\frac{1}{2}$，$f(1)=f(-1+2)=f(-1)+f(2)$，即$\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+f(2)$，故有 $f(2)=1$。而 $f(3)=f(1+2)=f(1)+f(2)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$，
$f(5)=f(3+2)=f(3)+f(2)=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$。

4. $y = (a+1)(b-1) = (49+1)(21-1) = 1000$

5. (a) $f(x)=\sqrt{4x-23}$
定義域為 $4x-23\geq 0$，即 $x\geq\frac{23}{4}$。
值域為所有非負實數。
(b) $f(x)=\sqrt{4x^2+23}$
因對於任何 x，$4x^2+23\geq 0$，故定義域為所有實數。
值域為所有非負實數。
(c) $f(x)=|4x-23|$
定義域為所有實數。
值域為所有非負實數。
(d) $f(x)=|4x^2+23|$
定義域為所有實數。
值域為 $f(x)\geq 23$。
(e) $f(x)=\log(4x+23)$
定義域為 $4x+23>0$，即 $x>-\frac{23}{4}$。
值域為所有實數。

5.（續）(f)　$f(x)=\log\left|4x^2-23\right|$

定義域為所有實數。

值域為所有實數。

(g)　$f(x)=\dfrac{4x+23}{4x-23} = \dfrac{4x-23+46}{4x-23} = 1+\dfrac{46}{4x-23}$

定義域為 $4x-23\neq 0$，即 $x\neq \dfrac{23}{4}$。

值域為所有實數。

(h)　$f(x)=\dfrac{4x^2-23}{4x^2+23} = \dfrac{4x^2+23-46}{4x^2+23} = 1-\dfrac{46}{4x^2+23}$

定義域為 $4x^2+23\neq 0$，但由於 $4x^2+23=0$ 沒有實根，

故定義域為所有實數。

由於 $4x^2+23\geq 23$，故值域為 $1< f(x)\leq -1$。

(i)　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x-23}}$

定義域為 $4x-23>0$，即 $x>\dfrac{23}{4}$。

值域為 $f(x)>0$。

(j)　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+2x+3}}$

$$\begin{aligned}4x^2+2x+3 &= 4(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16})+3-\frac{1}{4}\\ &= 4(x+\frac{1}{4})^2+\frac{11}{4}\end{aligned}$$

所以對於任何 x，$4x^2+2x+3\geq 0$，故定義域為所有實數。

另一方面，$1\div\sqrt{\dfrac{11}{4}}=\dfrac{2}{\sqrt{11}}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$，所以值域為 $0< f(x)\leq \dfrac{2\sqrt{11}}{11}$。

6. (a) 令 $y=x+2$，所以 $x=y-2$，即反函數 $g(x)=x-2$。

(b) 令 $y=\dfrac{3x-4}{5x+6}$，所以

$$\begin{aligned} 5xy+6y &= 3x-4 \\ 3x-5xy &= 6y+4 \\ x &= \frac{6y+4}{3-5y} \end{aligned}$$

所以反函數 $g(x)=\dfrac{6x+4}{3-5x}$。

(c) 令 $y=\sqrt{7x-8}$，所以

$$\begin{aligned} y^2 &= 7x-8 \\ x &= \frac{y^2+8}{7} \end{aligned}$$

所以反函數 $g(x)=\dfrac{x^2+8}{7}$。

(d) 令 $y=\dfrac{1}{\sqrt{9x+10}}$，所以

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1}{9x+10} \\ 9x+10 &= \frac{1}{y^2} \\ x &= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{y^2}-10\right) \\ &= \frac{1-10y^2}{9y^2} \end{aligned}$$

所以反函數 $g(x)=\dfrac{1-10x^2}{9x^2}$。

7.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \\ b(ax+b)+a &= x \\ abx+b^2+a &= x \end{aligned}$$

即 $ab=1$， $a=\dfrac{1}{b}$。

及

$$\begin{aligned} b^2+a &= 0 \\ b^2+\frac{1}{b} &= 0 \\ b^3 &= -1 \end{aligned}$$

所以 $a=b=-1$， $a+b=(-1)+(-1)=-2$。

8. 由 $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$，得

$$\begin{aligned} y(x+1) &= 3x-1 \\ 3x-xy &= y+1 \\ x &= \frac{y+1}{3-y} \end{aligned}$$

即反函數為 $y=\dfrac{x+1}{3-x}$，其定義域為 $x\neq 3$。原函數的定義域為 $y\neq 3$。

9. $g(x)=x^2+a$，

$$\begin{aligned} g(g(3)) &= g(3^2+a) = g(9+a) \\ &= (9+a)^2+a = 81+19a+a^2 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} 81+19a+a^2 &= 123 \\ a^2+19a-42 &= 0 \end{aligned}$$

解得 $a=-21$ 或 2，因而得 $g(a)=(-21)^2-21=420$ 或 $g(2)=2^2+2=6$，所以最大值為 420。

10. 以 $1-x$ 代入原方程的 x，有 $f(-x)+10f(x)=11(1-x)$。
以 $1+x$ 代入原方程的 x，有 $f(x)+10f(-x)=11(1+x)$。
解聯方程 $\begin{cases} f(-x)+10f(x)=11(1-x) \\ f(x)+10f(-x)=11(1+x) \end{cases}$，得 $f(x)=1-\dfrac{11x}{9}$，
即 $f(99)=1-\dfrac{11\times 99}{9}=-120$。

一門科學，只有當它成功地運用數學時，才能達到真正完善的地步。

德國經濟學家、哲學家

馬克思

(Karl Marx 1818-1883)