「噢！數？」拾例集　　周浩然輯

三角 － 兩角和差的三角函數

摘要

1. 三角和差恆等式：
   (a) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
   (b) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
   (c) $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$
   (d) $\cot(a \pm b) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$
2. 倍角恆等式：
   (a) $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ 、 $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$
   (b) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
   $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$
   (c) $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$
   (d) $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$
   (e) $\sin 3a = 4\sin a \sin(60° - a)\sin(60° + a)$
   $\tan 3a = \tan a \tan(60° - a)\tan(60° + a)$
   $\cot 3a = \cot a \cot(60° - a)\cot(60° + a)$
3. 半角恆等式：
   (a) $\sin\dfrac{a}{2} \pm \cos\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{1 \pm \sin a}$　（第一個±取決於$\dfrac{a}{2}$的象限。）
   (b) $\cos\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$ ， $\sin\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$（±取決於$\dfrac{a}{2}$的象限。）
4. 積化和差恆等式：
   (a) $2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$
   (b) $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$
   (c) $2\sin a \sin b = -\cos(a+b) + \cos(a-b)$

5. 和差化積恆等式：

(a) $\sin a+\sin b=2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$

(b) $\sin a-\sin b=2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$

(c) $\cos a+\cos b=2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$

(d) $\cos a-\cos b=-2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})$

6. 利用三角恆等式進行求值、化簡等運算。
7. 利用三角形內角和，把三角形內三角的問題化簡。
8. 運用配對法計算三角函數數列和。

拾例

1. 已知 $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{4}$，且 a,b 為自然數。若 $y=a+b$，求 y 的值。
(HKMO 2001/02 初賽個人)

答：

$$\begin{aligned}
\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\
&= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

所以 y $= 6+2 = 8$

2. 計算 $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$。

答：解法一：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \\
&= \frac{1}{2}\cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ \\
&= \frac{8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16\sin 20^\circ} \\
&= \frac{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16\sin 20^\circ} \\
&= \frac{\sin 160^\circ}{16\sin 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ}{16\sin 20^\circ} \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

解法二：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{1}{2}\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \\
&= \frac{1}{2}\sin 10^\circ \sin(60^\circ - 10^\circ)\sin(60^\circ + 10^\circ) \\
&= \frac{1}{8}\sin 30^\circ = \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

3.　計算 $\tan 80^\circ \tan 40^\circ \tan 20^\circ$ 。

答：　原式

$$
\begin{aligned}
&= \tan(60+20)^\circ \tan(60-20)^\circ \tan 20^\circ \\
&= \frac{\tan 60^\circ + \tan 20^\circ}{1-\tan 20^\circ \tan 60^\circ} \times \frac{\tan 60^\circ - \tan 20^\circ}{1+\tan 20^\circ \tan 60^\circ} \times \tan 20^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3} + \tan 20^\circ}{1-\sqrt{3}\tan 20^\circ} \times \frac{\sqrt{3} - \tan 20^\circ}{1+\sqrt{3}\tan 20^\circ} \times \tan 20^\circ \\
&= \frac{(\sqrt{3})^2 - \tan^2 20^\circ}{1^2 - (\sqrt{3}\tan 20^\circ)^2} \times \tan 20^\circ \quad = \quad \frac{3-\tan^2 20^\circ}{1-3\tan^2 20^\circ} \times \tan 20^\circ \\
&= \frac{3\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ}{\cos^2 20^\circ - 3\sin^2 20^\circ} \times \tan 20^\circ \\
&= \frac{2(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ)}{2(\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ) - (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ)} \times \tan 20^\circ \\
&= \frac{2\cos 40^\circ + 1}{2\cos 40^\circ - 1} \times \tan 20^\circ \\
&= \frac{2\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ} \\
&= \frac{\sin 60^\circ - \sin 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 60^\circ + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ} \quad = \quad \tan 60^\circ \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

（註：使用恆等式 $\tan 3a = \tan a \tan(60^\circ - a)\tan(60^\circ + a)$ 可減省計算時間。）

4.　若 $\sin(\frac{\pi}{3}+x)+\sin(\frac{\pi}{3}-x) = a\cos x$ ，求 a^2 的值。（FWMT-C 2002）

答：

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x &= a\cos x \\
2\sin\frac{\pi}{3}\cos x &= a\cos x
\end{aligned}
$$

所以 $a^2 = 4\cos^2\frac{\pi}{3} = 4(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3$ 。

5. 設 $M=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$，求 M 的值。

答： 設 $N=\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}$，

則 MN
$$\begin{aligned}
&= (\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7})(\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7})(\cos\frac{3\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}) \\
&\quad \times(\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7})(\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7})(\cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}) \\
&= \frac{1}{64}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7}\sin\frac{10\pi}{7}\sin\frac{12\pi}{7} \\
&= \frac{1}{64}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}(-\sin\frac{\pi}{7})(-\sin\frac{3\pi}{7})(-\sin\frac{5\pi}{7}) \\
&= -\frac{1}{64}\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7} \\
&= -\frac{N}{64}\text{。}
\end{aligned}$$

所以 $M=-\frac{1}{64}$。

6. 若 $\cos A=\frac{2}{7}$，且 A 為銳角，求下列各式的值：

(a) $\cos 2A$

(b) $\sin 2A$

答： (a)
$$\begin{aligned}
\cos 2A &= 2\cos^2 A-1 = 2(\frac{2}{7})^2-1 \\
&= -\frac{41}{49}\text{。}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\sin 2A &= 2\sin A\cos A \\
&= 2\cos A\sqrt{1-\cos^2 A} \\
&= 2\times\frac{2}{7}\times\sqrt{1-(\frac{2}{7})^2} = 2\times\frac{2}{7}\times\frac{\sqrt{45}}{7} \\
&= \frac{12\sqrt{5}}{49}\text{。}
\end{aligned}$$

7. 求 $\sin 18°$ 的值。

答： 解法一：

由於
$$\begin{aligned}
\sin 54° &= \cos 36° \\
\sin(3\times 18°) &= \cos(2\times 18°) \\
3\sin 18° - 4\sin^3 18° &= 1 - 2\sin^2 18° \\
4\sin^3 18° - 2\sin^2 18° - 3\sin 18° + 1 &= 0 \\
(\sin 18° - 1)(4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1) &= 0
\end{aligned}$$

由於 $\sin 18° \neq 1$，

所以
$$\begin{aligned}
\sin 18° &= \frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4(4)(-1)}}{2(4)} \\
&= \frac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

由於 $\sin 18° > 0$，所以 $\sin 18° = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$。

解法二：

由於
$$\begin{aligned}
\cos 54° &= \sin 36° \\
\cos(3\times 18°) &= \sin(2\times 18°) \\
4\cos^3 18° - 3\cos 18° &= 2\sin 18° \cos 18°
\end{aligned}$$

由於 $\cos 18° \neq 0$，

$$\begin{aligned}
4\cos^2 18° - 2\sin 18° - 3 &= 0 \\
4(1-\sin^2 18°) - 2\sin 18° - 3 &= 0 \\
4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 &= 0
\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}
\sin 18° &= \frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4(4)(-1)}}{2(4)} \\
&= \frac{-2\pm\sqrt{20}}{8} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

由於 $\sin 18° > 0$，所以 $\sin 18° = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$。

8. 若 $\tan(a+b)=6$，$\tan(a-b)=4$，求 $\tan 2a$ 及 $\tan 2b$ 的值。

答：

$$\tan 2a = \tan[(a+b)+(a-b)] = \frac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{1-\tan(a+b)\tan(a-b)}$$

$$= \frac{6+4}{1-6\times 4} = -\frac{10}{23}$$

$$\tan 2b = \tan[(a+b)-(a-b)] = \frac{\tan(a+b)-\tan(a-b)}{1+\tan(a+b)\tan(a-b)}$$

$$= \frac{6-4}{1+6\times 4} = \frac{2}{25}$$

9. 已知 $\sin(a+b)=\frac{1}{2}, \sin(a-b)=\frac{1}{3}$，求 $\log_{\sqrt{5}}(\tan^2 a\cot^2 b)$ 的值。

答：

$$\sin a\cos b+\cos a\sin b = \frac{1}{2}$$

$$\sin a\cos b-\cos a\sin b = \frac{1}{3}$$

兩式的和，得 $\sin a\cos b = \frac{5}{12}$，

兩式的差，得 $\cos a\sin b = \frac{1}{12}$。

由此得 $\frac{\sin a\cos b}{\cos a\sin b} = 5$

$$\tan a\cot b = 5$$

所以 $\log_{\sqrt{5}}(\tan^2 a\cot^2 b) = \log_{\sqrt{5}} 25 = 4$。

10. 設 ABC 為一三角形。若 $\sin A=\frac{3}{5}$、$\cos B=\frac{5}{13}$，求 $\tan C$ 的值。

答： 因 $\cos B=\frac{5}{13}$， 所以 $\sin B=\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=\frac{12}{13}$；

$\sin A=\frac{3}{5}$， 所以 $\cos A=\pm\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\pm\frac{4}{5}$。

但我們留意 $\sin B>\sin A$，若 A, B 均為銳角，則 $B>A$。

但若 A 為鈍角，則 $B>180°-A$，即 $A+B>180°$，這是不可能。

所以 $\cos A=\frac{4}{5}$。

由此得 $\tan A=\frac{3}{4}, \tan B=\frac{12}{5}$；

$C=180°-A-B$

$$\tan C = \tan(180°-A-B) = -\tan(A+B)$$

$$= -\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} = -\frac{\frac{3}{4}+\frac{12}{5}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{12}{5}}$$

$$= -\frac{63/20}{-4/5} = \frac{63}{16}。$$

或許有個天使曾經察看無盡的渾沌之海，

然後用手指緩緩攪動。就在這微小、短暫

的方程漩渦裡，我們的宇宙開始成形。

美國數學家、科普作家

加德納

(Martin Gardner 1914-2010)

淺問

1. 若 $\sin x = a$ 、 $\cos y = b$ 及 $0° < x < 90° < y < 180°$，求 $\sin(x+y)$ 和 $\cos(x-y)$ 的值。

2. 若 $\sin x = \dfrac{2}{3}$，且 x 為銳角，求 $\cos 2x, \sin 2x, \tan 2x, \cot 2x$ 的值。

3. 若 $\sin x = \dfrac{1}{4}$，且 $90° < x < 180°$，求 $\sin\dfrac{x}{2}$ 的值。

4. 已知 $\cos(2x-y) = -\dfrac{1}{9}$ 、 $\sin(x-2y) = \dfrac{2}{3}$，且 $0 < x, y < \dfrac{\pi}{2}$。求 $\cos(x+y)$。

5. 計算下列各式的值：
   (a) $\cos 15°$　　(b) $\tan 75°$　　(c) $\sin 144°$

6. 計算下列各式的值：
   (a) $\cos 40° + \cos 80° + \cos 160°$
   (b) $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80°$

7. 計算下列各式的值：
   (a) $\sin\dfrac{5\pi}{12} + \sin\dfrac{\pi}{12}$　　(b) $\cos\dfrac{\pi}{17}\cos\dfrac{2\pi}{17}\cos\dfrac{4\pi}{17}\cos\dfrac{8\pi}{17}$。

8. 計算 $(1+\tan 21°)(1+\tan 22°)(1+\tan 23°)(1+\tan 24°)$。
   (HKMO 1993/94 決賽團體)

9. 化簡下列各式
   (a) $\dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \dfrac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}$
   (b) $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}$

10. 在 ΔABC 內，求下列各式的值：
    (a) $\tan A \tan B \tan C - \tan A - \tan B - \tan C$
    (b) $\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C + 1$
    (c) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A$

詳答

1. 因為 $0° < x < 90°$ ，故 $\cos x = \sqrt{1-a^2}$ 。

因為 $90° < y < 180°$，故 $\sin y = -\sqrt{1-b^2}$ 。

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y = ab - \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y = b\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-b^2}$$

2. $$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-(\frac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos 2x = 1-2\sin^2 x = 1-2(\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{9}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = 2\times\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 4\sqrt{5}$$

$$\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{20}$$

3. 因為 $90° < x < 180°$，所以 $45° < \frac{x}{2} < 90°$，即 $\sin\frac{x}{2} > \cos\frac{x}{2}$

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2} = \sqrt{1+\sin x} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2} = \sqrt{1-\sin x} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以 $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}$ 。

4. $\sin(2x-y) = \sqrt{1-\cos^2(2x-y)}$

$= \sqrt{1-(-\frac{1}{9})^2} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

$\cos(x-2y) = \sqrt{1-\sin^2(x-2y)}$

$= \sqrt{1-(\frac{2}{3})^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos(x+y) = \cos[(2x-y)-(x-2y)]$

$= \cos(2x-y)\cos(x-2y)+\sin(2x-y)\sin(x-2y)$

$= (-\frac{1}{9})\times\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{2}{3} = \frac{7\sqrt{5}}{27}$

5. (a) $\cos 15° = \cos(60°-45°)$

$= \cos 60°\cos 45° + \sin 60°\sin 45°$

$= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(b) $\tan\frac{5\pi}{6} = \tan(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{2}}$

$= \dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\times 1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$

5. (c)

$$\sin 36° = \cos 54°$$

$$2\sin 18°\cos 18° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18°$$

$$4\cos^2 18° - 2\sin 18° - 3 = 0 \quad （因為\ \cos 18° \neq 0）$$

$$4(1-\sin^2 18°) - 2\sin 18° - 3 = 0$$

$$4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$$

$$\sin 18° = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

因為 $\sin 18° > 0$，所以 $\sin 18° = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$。

$$\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2 18°} = \sqrt{1-(\frac{-1+\sqrt{5}}{4})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{16-1+2\sqrt{5}-5}{16}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin 144° = \sin 36°$$

$$= 2 \times \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \times \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{40-8\sqrt{5}}}{8} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

6. (a) 原式 $= 2\cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ$

$= \cos 20^\circ - \cos 20^\circ = 0$

(b) 原式 $= -\frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 20^\circ) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sin 80^\circ$

$= -\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{2}\sin 80^\circ - \sin 80^\circ \cos 20^\circ)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{4}[\frac{1}{2}\sin 80^\circ - \frac{1}{2}(\sin 100^\circ + \sin 60^\circ)]$

$= -\frac{\sqrt{3}}{8}[\sin 80^\circ - \sin 80^\circ + \frac{1}{2}] = -\frac{\sqrt{3}}{16}$

7. (a) 原式 $= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(b) 原式 $= \dfrac{16\sin\frac{\pi}{17}\cos\frac{\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}}{16\sin\frac{\pi}{17}}$

$= \dfrac{8\sin\frac{2\pi}{17}\cos\frac{2\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}}{16\sin\frac{\pi}{17}}$

$= \dfrac{4\sin\frac{4\pi}{17}\cos\frac{4\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}}{16\sin\frac{\pi}{17}} = \dfrac{2\sin\frac{8\pi}{17}\cos\frac{8\pi}{17}}{16\sin\frac{\pi}{17}}$

$= \dfrac{\sin\frac{16\pi}{17}}{16\sin\frac{\pi}{17}} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{17}}{16\sin\frac{\pi}{17}}$

$= \frac{1}{16}$

8. 由 $\tan 45^\circ = \dfrac{\tan x + \tan(45^\circ - x)}{1 - \tan x \tan(45^\circ - x)}$ ，

即 $\tan x + \tan(45^\circ - x) + \tan x \tan(45^\circ - x) = 1$

所以上式 $= (1 + \tan 21^\circ + \tan 24^\circ + \tan 21^\circ \tan 24^\circ)$

$\times (1 + \tan 22^\circ + \tan 23^\circ + \tan 22^\circ \tan 23^\circ)$

$= (1+1)(1+1) = 4$

9. (a) $\dfrac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \dfrac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x}$

$= \dfrac{\cos^3 x - 4\cos^3 x + 3\cos x}{\cos x} + \dfrac{\sin^3 x + 3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x}$

$= \dfrac{-3\cos^3 x + 3\cos x}{\cos x} + \dfrac{-3\sin^3 x + 3\sin x}{\sin x}$

$= 3(1 - \cos^2 x) + 3(1 - \sin^2 x)$

$= 3\cos^2 x + 3\sin^2 x = 3$

(b) $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}$

$= \dfrac{(\sin x + \sin 7x) + (\sin 3x + \sin 5x)}{(\cos x + \cos 7x) + (\cos 3x + \cos 5x)}$

$= \dfrac{2\sin 4x \cos 3x + 2\sin 4x \cos x}{2\cos 4x \cos 3x + 2\cos 4x \cos x}$

$= \dfrac{2\sin 4x(\cos 3x + \cos x)}{2\cos 4x(\cos 3x + \cos x)} = \tan 4x$

10. (a) 考慮 $\tan C = \tan[\pi - (A+B)]$

$$= -\tan(A+B)$$

$$= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

所以 $\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C$

$$\tan A \tan B \tan C - \tan A - \tan B - \tan C = 0$$

(b) $\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C + 1$

$$= 2\cos(2A+2B)\cos(2A-2B) + \cos 2(2C) + 1$$

$$= 2\cos(2A+2B)\cos(2A-2B) + 2\cos^2 2C - 1 + 1$$

$$= 2\cos 2C \cos(2A-2B) + 2\cos^2 2C$$

$$= 2\cos 2C[\cos(2A-2B) + \cos(2A+2B)]$$

$$= 4\cos 2A \cos 2B \cos 2C$$

(c) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A$

$$= \cot A \cot B - \cot B \cot(A+B) - \cot(A+B)\cot A$$

$$= \frac{1}{\tan A \tan B} - \frac{1}{\tan(A+B)}\left(\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan B}\right)$$

$$= \frac{1}{\tan A \tan B} - \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B}\left(\frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B}\right)$$

$$= \frac{1}{\tan A \tan B} - \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A \tan B}$$

$$= \frac{1 - 1 + \tan A \tan B}{\tan A \tan B} = 1$$